

Der Dichteoperator
in Heims vektorieller Gravitationstheorie

- o Historisches
- o MBB-Rechnungen
- o Heims Rechnungen vom 23.2.81
- o Der Feldverlauf von $m(r)$ in der
Theorie von B. Heim und in der
Theorie von Arnowitt, Deser und
Misner (1962)

Verteiler:

AE331 - HH. Dr. Kroy
AE331 - Dr. Langerholc
IABG-WTF - Dr. A. Müller
AE331 - Harasim
AE433 - Dr. Vincon

Datum: 10.3.81

Bearbeiter: I. v. Ludwiger

In der Internen Information RX33-14/80 vom 15.8.1980 wurden mehrere Punkte aus dem Buch "Elementarstrukturen der Materie" von B. Heim (1980) diskutiert, die unklar waren. Es wurde u.a. gezeigt, daß der Ansatz von Heim, den er zur Beschreibung der Quelleneigenschaft des Gravitationsfeldes einer Masse $m(r)$ verwendet hatte, nicht genügend begründet worden war. Daher blieb auch der hergeleitete Normierungsfaktor im Dichteoperator unklar, dessen Bestimmung wesentlich die vektorielle Gravitations-Beschreibung beeinflusst (Wert des Metrons, Geschwindigkeit gravitativer Feldstörungen u.a.)

Am 23.2.1981 führte Herr Heim bei MBB eine Herleitung dieser Beziehung vor. Teilnehmer seitens MBB waren die Herren Harasim, Dr. Langerholc, v. Ludwiger und Dr. Vincon.

Historisches:

Bereits 1979 erhielten Dr. Müller und H. v. Ludwiger von H. Heim das Manuskript "Elementarstrukturen der Materie" zur Durchsicht. H. v. Ludwiger hatte versucht, entsprechend dem von Heim angegebenen Ansatz für den Dichteoperator

$$\Delta \varphi = \gamma \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{m(r)}{r} \right) = q \quad (1)$$

auf die Beziehung

$$q = \frac{4\pi\gamma}{3} \left(9V \frac{d^2 m}{dV^2} + 6 \frac{dm}{dV} + 1 \right) \quad (2)$$

$$(q = \operatorname{const.} \cdot \sigma) \quad , \quad \sigma \equiv \text{Dichte}$$

und für den Grenzübergang $r \rightarrow r_0$ auf

$$q_0 = 16 \left(\frac{4\pi}{3} \right) \frac{m_0}{V_0} \quad (3)$$

zu kommen. H. Prof. Auerbach von der ETH Zürich machte uns darauf aufmerksam, daß die Beziehungen (2) und (3), die aus dem Ansatz (1) erhalten wurden, offenbar mit einem Laplaceoperator Δ für den Fall sphärischer Symmetrie in Polarkoordinaten

$$\Delta \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left(+ \frac{1}{r^3} \right) \quad (4)$$

angesetzt waren, der fälschlicherweise ein Glied $\frac{1}{r^3}$ zuviel enthielt, was ein Blick in die entsprechende Literatur bestätigte.

Diese Entdeckung teilten wir H. Heim im Dezember 1979 mit. Es blieb ungewiß, ob H. Heim vor mehr als 20 Jahren versehentlich den falschen Operator oder einen anderen Ansatz als (1) verwendet hatte.

Jedenfalls änderte H. Heim die betreffenden Stellen im Manuskript (S.48) dahingehend, daß nicht mehr Ansatz (1), sondern der folgende maßgebend sein sollte:

$$q = \Delta \varphi + \frac{\mathcal{L}}{r^2} \quad (5)$$

wobei $\text{div} \Gamma = \frac{\mathcal{L}}{r^2}$ die Quelle eines Hilfsvektors Γ sein sollte, dessen Notwendigkeit nicht unmittelbar einleuchtete. Die explizite Herleitung sollte allerdings im 2. Band nachgeliefert werden.

In der II. vom 15.8.1980 versuchten wir zwar durch eigene Rechnungen den Normierungsfaktor herzuleiten, was jedoch mißlang, weil die 2. Ableitung der Masse nach dem Volumen zu Null wurde.

Im Dezember 1980 erhielten Dr. Müller (IABG) und H. v. Ludwiger (MBB) Teile des Manuskripts des 2. Bandes von H. Heim, in welchem die Herleitung des Dichteoperators ausführlich mitgeteilt wurde. Darin wurden verschiedene Definitionen für Materiedichten (Gl.6) angegeben. Die Bedeutung der Beziehung $\sigma = \sigma_m + \sigma_\mu$ blieb jedoch unklar, und Nachrechnen führte auf einen anderen als auf den von Heim angegebenen Dichteoperator.

MBB-Rechnungen:

Die Massendichte der Quelle σ_0 im Abstand r_0 und diejenige von Quelle und Feld σ_m im Abstand r vom Zentrum sind nach Heim definiert durch

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{m_0}{V_0} \\ \sigma_m &= \frac{m(r)}{V} = \frac{m_0}{V} + \frac{\mu(r)}{V} = \frac{m_0}{V} + \sigma_\mu\end{aligned}\quad (6)$$

wobei $\mu(r)$ die Feldmasse kennzeichnet.

Mit $g = \text{grad} \varphi$ und Transformation $\text{div} g = \text{div grad } \varphi$ in Polarkoordinaten folgt für die Feldquelle einer elementaren Masse $q = \Delta \varphi = \alpha \sigma_m$

$$\text{div grad } \varphi = \frac{4}{3} \pi g \left(gV \frac{d^2 m}{dV^2} + 6 \frac{dm}{dV} \right) = \frac{4}{3} \pi g \left(gV \frac{d^2}{dV^2} + 6 \frac{d}{dV} \right) (m_0 + \mu(r)) \quad (7)$$

wenn r durch V substituiert wird. Im Bereich $r > r_0$ ändert sich m_0 nicht mit dem Abstand, und der Quellenanteil im Außenraum $r > r_0$ ist

$$\text{div} g = \frac{4\pi g}{3} \left(gV \frac{d^2 \mu}{dV^2} + 6 \frac{d\mu}{dV} \right) = \frac{4\pi g}{3} \sigma_\mu \quad (8)$$

Die gesamte Quelle σ muß also noch durch den Quellenanteil zu (8) ergänzt werden. Dieser ergibt sich durch Grenzübergang $V \rightarrow V_0$ aus (7)

$$\operatorname{div} g_0 = \frac{4\pi\gamma}{3} \lim_{\substack{V \rightarrow V_0 \\ m \rightarrow m_0}} \left(gV \frac{d^2 m}{dV} + 6 \frac{dm}{dV} \right) = 8\pi\gamma \sigma_0 \quad (9)$$

Wird die Quellmasse m_0 auf das Volumen V verteilt gedacht, also die neue Dichte $\sigma_{or} = \frac{m_0}{V} = \frac{m}{V} = \frac{3}{4\pi\gamma} \frac{\gamma}{r^2}$ definiert, so kann anstelle von g_0 der neue Feldvektor Γ geschrieben werden

$$\operatorname{div} \Gamma = \sigma_{or} = \frac{3}{4\pi\gamma} \frac{\gamma}{r^2} \quad (10)$$

und (8) und (9) lassen sich zusammenfassen:

$$\sigma_m = \sigma_r + 6\sigma_{or} = \frac{3}{4\pi\gamma} \operatorname{div} (g + \Gamma) \quad (11)$$

Die gesamte Quelle setzt sich aus der Dichte des Feldes und aus der wegen (9) mit dem Faktor 6 normierten Dichte $6\sigma_{or}$ zusammen, oder

$$\operatorname{div} (g + \Gamma) = \frac{4\pi\gamma}{3} \left(gV \frac{d^2 m}{dV^2} + 6 \frac{dm}{dV} + 6 \frac{m}{V} \right) \quad (12)$$

Mit dem Normierungsfaktor $1/2$, der die Konsistenz für $V \rightarrow V_0$ sichert, kann der Dichteoperator $\mathcal{L}$ in folgender Form definiert werden:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2V} \left(\frac{3}{2} V^2 \frac{d^2}{dV^2} + V \frac{d}{dV} + 1 \right) \quad (13)$$

Wegen (13) tritt in (12), also

$$\operatorname{div}(\eta + \Gamma) = 8\pi\gamma \mathcal{L}_{jm} \quad (14)$$

ein durch $\alpha = \frac{1}{16\pi\gamma}$ definierter Proportionalitätsfaktor auf:

$$\alpha \operatorname{div}(\eta + \Gamma) = \mathcal{L}_{jm} = \sigma_{jm} \quad (15)$$

Damit würden auf S.48 des Buches "Elementarstrukturen der Materie" die Kürzungen a und ε folgendermaßen lauten:

$$a = \frac{2\pi\gamma^2}{c^2} \alpha = \frac{\gamma}{8c^2} \quad (16)$$

$$\varepsilon = \frac{4a}{\gamma} = \frac{1}{2c^2} \quad (17)$$

und wegen $\varphi_{Ext} = 2\omega c$ aus $\varepsilon \varphi_{Ext} = 1$ würde für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Gravitationsfeldstörungen der Wert $\omega = c$ folgen, und nicht $\frac{4}{3}c = \omega$ wie nach Heims Rechnungen.

Heims Rechnungen am 23.2.81

Heim definiert wieder die Dichten wie in (6). Zur Untersuchung der Feldverteilung wird aber noch eine Massendichte gesucht, deren totale Zeitableitung verschwindet. Für $\mu(r) \rightarrow 0$, also $m \rightarrow m_0$ gilt die Newtonsche Beziehung $\frac{d\sigma_0}{dt} = 0$. Die totalen Zeitableitungen $\frac{d\sigma_m}{dt}$ und $\frac{d\sigma_{jm}}{dt}$ sind von Null verschieden und einander proportional, weil $c^2 d\sigma_{jm}$ einer Änderung der

Feldenergiedichte entspricht, um die σ_m in der Zeit vermindert wird. Es gilt somit für zeitlich variable makroskopische Gravitationsfelder:

$$\frac{d}{dt}(\sigma_m + a'\sigma_\mu) = 0, \quad a' = \text{const} \neq 0 \quad (18)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \underline{\sigma} = 0 \quad \text{mit}$$

$$\underline{\sigma} = b\sigma = \sigma_m + \underline{\sigma}_\mu = \sigma_m + a'\sigma_\mu,$$

(19)

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_\mu,$$

$$\underline{\sigma}_\mu = a'\sigma_\mu$$

Für die Dichte σ_μ außerhalb des Volumens V_0 gilt wieder die Beziehung (8), aber nun für $\underline{\sigma}_\mu$ anstelle von σ_μ . Die gesamte als Quelle in Betracht kommende Masse ist

$$\underline{\sigma} = \sigma_m + a\sigma_\mu = \frac{m_0}{V} + (1+a)\sigma_\mu = b\sigma \quad (20)$$

σ_m kann als Quelle eines neuen Feldvektors Γ geschrieben werden:

$$\sigma_m = \frac{3}{4\pi g} \frac{\varphi}{r^2} = \frac{3}{4\pi g} \text{div } \Gamma \quad (21)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \frac{3}{4\pi g} \text{div}(\varphi + \Gamma) \\ &= \frac{3}{4\pi g} \left(\text{div grad } \varphi + \frac{\varphi}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{V} \left(g V^2 \frac{d^2 m}{d V^2} + 6 V \frac{d m}{d V} + m \right) \quad (23)$$

Da das Verhältnis $b = \underline{\sigma} : \overline{\sigma}$ für jeden Dichteverlauf gilt, nimmt Heim zur Bestimmung der Konstanten b einen Normalverlauf $M(R)$ an, bezogen auf dessen Volumen $V_R = \text{const}$ eine Normalverteilung der Materie erreicht wird.

D.h. es gibt mindestens einen Funktionsverlauf, für den die 2. Ableitung nach V nicht verschwindet und die Relationen gelten:

$$\overline{\sigma}_R = \left(\frac{M}{V} \right)_R = \left(\frac{dM}{dV} \right)_R = \left(V \frac{d^2 M}{d V^2} \right)_R \quad (24)$$

Allerdings ist das von H. Heim angeführte Beispiel für einen solchen Normverlauf nicht stimmig. $M(V) = B(V^2 + V V_R)$ gibt als erste Ableitung nach V an der Stelle R den Wert $4 B V_R$, ebenso wie der Ausdruck $\left(V_R \frac{d^2 M}{d V^2} \right)_R$. Aber $\left(\frac{M(V)}{V} \right)_R$ unterscheidet sich davon um die Hälfte.

Nach einer telefonischen Rücksprache am 3.3. erklärte uns H. Heim, daß der Normverlauf im R_6 betrachtet werden müsse. Ist b eine konstante Dichte im R_6 und $\rho = \frac{M_0}{V_R} = b V$ die Dichte im R_3 , wenn V_R eine konstante Dichte im R_3 kennzeichnet, dann könne gezeigt werden, daß für $M(V) = b(V^2 + V_R^2)$ die Beziehung (24) erfüllt ist, wenn $V = V_R$ gesetzt wird.

Dieser Punkt bedarf noch der Klärung!

Der Faktor im Klammerausdruck in (23) ist mit (24)

$$b = \underline{\sigma}_R : \overline{\sigma}_R = \underline{\sigma} : \overline{\sigma} = 16 \quad (25)$$

Mit der Kürzung $\alpha = \frac{3}{64\pi f}$ lautet (23) demzufolge

$$\alpha \operatorname{div}(g + \Gamma) = \mathcal{L}_{jm} = 5 \quad (26)$$

mit dem Dichteoperator $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16V} (3V [\frac{d}{dv}] + 1)^2 \quad \text{für } r \geq r_0 \quad (27)$$

Die Beziehungen führen auf $\omega = \frac{4}{3}c$. Ihre Herleitung wird im Band 2 der Heimschen Arbeit nachzulesen sein.

Der Feldverlauf von $M(v)$ in der Theorie von B. Heim und in der Theorie von Arnowitt, Deser und Misner (1962)

Arnowitt, Deser und Misner berücksichtigen, wie Heim die Selbstenergie für ruhende Partikel durch den Ansatz

$$m = m_0 \left(1 - \frac{m_0}{2c^2} \varphi_0\right) = m_0 - \frac{1}{2} \frac{m_0^2}{c^2 r_0} \quad (28)$$

weil die gravitative Wechselwirkungsenergie in der Newtonschen Näherung negativ ist.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie fordert das Äquivalenzprinzip, daß die gesamte Energie gravitativ wechselwirkt und nicht nur die schwere Masse m_0 .

Da die Wechselwirkungsenergie negativ ist, wird mit zunehmender Entfernung von der Quelle ein Punkt erreicht, wo die Gesamtenergie verschwindet und keine weitere Wechselwirkung mehr existiert. Konsequenterweise kann es keine negative Gesamtenergie geben, im Gegensatz zur Newton-Theorie. Die ART ersetzt m_0 durch den Wechselwirkungs-Term

$$m = m_0 - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{c^2} \frac{m^2(r)}{r_0} \quad (29)$$

Aufgelöst nach $m(r)$ ergibt das

$$m(r) = -\frac{r_0}{\gamma} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2\gamma m_0 r_0} \right) \quad (30)$$

Dieser Ausdruck, den Arnowitt, Deser und Misner (1962, S.257) angeben, kann nur für den Grenzfall $\lim_{r \rightarrow r_0} m(r)$ gültig sein, denn die rechte Seite hängt nicht von r ab. Es soll gezeigt werden, wie Heim zu einem ähnlichen Ausdruck gelangt, der jedoch die Bedingungen $\lim_{r \rightarrow r_0} m(r) = m_0$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = \text{const.}$ erfüllt.

Anstelle von (29) setzt Heim die Energie- bzw. Massenbeziehung (z.B. wie Dehnen, 1964) folgendermaßen an: Die potentielle Energie des Feldes ist

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= -\frac{\gamma}{2} \iint \frac{dm_1 dm_2}{r_{12}} = \frac{1}{2} \int \sigma \varphi dV \\ &= -\frac{\alpha}{2} \int (\text{grad } \varphi)^2 dV \end{aligned} \quad (31)$$

Damit wird (29):

$$m(r) = m_0 - \mu_g = m_0 - \frac{\alpha}{2} \int g^2 dV \quad (32)$$

E_r E' E_g
 Ruhe- pot. Feld-
 Energie energie

Differentiation hinsichtlich r und Berücksichtigung von $\alpha = \frac{3}{64}\pi\gamma$,
 $\gamma = \gamma \text{ grad} \left(\frac{m(r)}{r} \right)$ und $dV = 4\pi r^2 dr$ führt auf die Differentialgleichung (Heim
 S. 49):

$$m_{,r} + a \left(m_{,r} - \frac{m}{r} \right)^2 = 0, \quad a = \frac{3}{32} \frac{\gamma}{c^2} \quad (33)$$

Mit den Kürzungen $\phi = \frac{m}{r}$ und $m_{,r} = r\phi_{,r} + \phi$ gilt

$$r\phi_{,r} + \phi + a(r\phi_{,r})^2 = 0 \quad (34)$$

oder mit der Transformation $\left(\frac{r}{dr} \right) \rightarrow \frac{d}{d \ln r}$:

$$a(\phi_{,\ln r})^2 + \phi_{,\ln r} + \phi = 0 \quad (35)$$

$$\phi_{,\ln r} = -\frac{1}{2a} (1 \pm \sqrt{1 - 4a\phi}) \quad (36)$$

$$\ln(r-r_0) = -2a \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{1 \pm \sqrt{1 - 4a\phi}} = \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d(1 - 4a\phi)}{1 \pm \sqrt{1 - 4a\phi}} \quad (37)$$

Wird zur Kürzung $x^2 = 1 - 4a\phi$ und $z = 1 \pm x$ gesetzt, so wird aus (37)

$$\begin{aligned} \ln \frac{r}{r_0} &= \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{d(z-1)^2}{z} = \int_{z_0}^z \frac{z dz - dz}{dz} \\ &= \int_{z_0}^z \frac{(z-1)}{dz} dz = \ln \frac{z_0 e^{-z_0}}{z e^{-z}} \end{aligned} \quad (38)$$

$$r z e^{-z} = r_0 z_0 e^{-z_0} = r(1 \pm \sqrt{1-4a\phi}) \exp[-(1 \pm \sqrt{1-4a\phi})] \quad (39)$$

$$= \text{const}$$

oder approximativ

$$r(1 \pm |1 - \frac{2am}{r}|) e^{-(1 \pm |1 - \frac{2am}{r}|)} = r_0(1 \pm |1 - \frac{2am_0}{r_0}|) e^{-(1 \pm |1 - \frac{2am_0}{r_0}|)} \quad (40)$$

$$= k$$

Der positive Zweig divergiert. Es kommt daher nur der negative Zweig in Betracht. Wird von $e^{2am/r} \approx 1 + 2\frac{am}{r} + 4\frac{a^2m^2}{r^2} + \dots$ nur die 2. Ordnung mitberücksichtigt

$$\frac{2am}{r} (1 - \frac{2am}{r} - 4\frac{a^2m^2}{r^2}) = \frac{k}{r} \quad (41)$$

wobei wegen (40)

$$k = 2am_0(1 - \frac{2am_0}{r_0}) \quad (42)$$

ist, so gilt in der Näherung 2. Ordnung

$$m(r) = \frac{r}{4a} \pm \sqrt{\frac{r^2}{16a^2} - \frac{kr}{4a^2}} \quad (43)$$

$$= \frac{r}{4a} (1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k}{r}})$$

Für $r \rightarrow 0$ verschwindet dieser Ausdruck. Beim Grenzübergang $r \rightarrow r_0$ ist

$$\lim_{r \rightarrow r_0} m(r) = \frac{r_0}{4a} \left[1 - \left| 1 - \frac{4am_0}{r_0} \right| \right] = m_0 \quad (44)$$

Und für den Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ bleibt $m(r) < \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{r}{4a} \left(1 - \left| 1 - \frac{2K}{r} - 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{K_{\nu}}{r^{\nu-1}} \right| \right) \right] \quad (45)$$

$$= \frac{1}{2a} \left(K - \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{K_{\nu}}{r^{\nu-2}} \right) < \infty \quad (46)$$

Die Feldmasse μ_g kann nun bestimmt werden aus der Beziehung

$$\mu_g = \lim_{r \rightarrow \infty} (m(r) - m_0) = m_0 \left(1 - \frac{2am_0}{r_0} \right) - m_0 \quad (47)$$

$$\mu_g = - \frac{3}{16} \frac{\chi}{c^2} \frac{m_0^2}{r_0} \quad (48)$$

Der Vergleich zwischen (47) bzw. (48) mit dem Wert für die Feldmasse in der Theorie von Arnowitt, Deser und Misner (Gl. 28) zeigt, daß in Heims Theorie ein Faktor $\frac{3}{8}$ auftritt, der auf den Wert des Normierungsfaktors im Dichteoperator $\mathcal{L}$ zurückzuführen ist, Wegen $a = \frac{3}{32} \frac{\chi}{c^2}$ in Heims Theorie, und $a = \frac{1}{4} \frac{\chi}{c^2}$ in der ADM-Theorie.

Literatur:

Arnowitt, R., S. Deser und C.M. Misner 1962:

"The Dynamics of General Relativity", S. 227 - 265 in

"Gravitation: An Introduction to Current Research", ed by

L. Witten, John Wiley & Sons Inc., New York

Dehnen, H. 1964:

"Über den Energieinhalt statischer Gravitationsfelder nach
der allgemeinen Relativitätstheorie in Newtonscher Näherung",
Z.f.Physik, 179, (96 - 101)