

Untersuchungen zur
nichtquantisierten Heimschen
Gravitationstheorie

Teil I

Inhalt:

Es werden spezielle Fragen zur Heimschen einheitlichen Feldtheorie untersucht. Im ersten Viertel des Buches "Elementarstrukturen der Materie" von B. Heim (1980) ist die zugrundeliegende Gravitationstheorie nur kurz angedeutet worden. Die vorliegende Arbeit will einzelne Punkte der nichtsymmetrischen einheitlichen Feldtheorie im "realen R_4 " ausführlicher darstellen bzw. herleiten und gibt Hinweise auf entsprechende Arbeiten zur Gravitationstheorie in der Literatur. Es werden u.a. behandelt das modifizierte Potentialgesetz, die Orthogonalitätsbeziehungen zwischen den Feldvektoren, die Energieströmung und die Transformationsmatrix der Gravitation sowie die Einstein-Cartan-Theorie.

Verteiler:

HH.	Hesse	RX33
	Dr. Dehm	RX33
	Dr. Kroy	AE202
	Dr. Langerholc	AE202
	Proske	AE25
	Dr. Roosen	AE253
	Dr. Vinçon	AE253
	Dr. Müller	IABG-WTF

Datum: 15.8.1980

Bearbeiter: v. Ludwig

Im Kapitel 4 der Arbeit "Elementarstrukturen der Materie" gibt Burkhard Heim die Funktion $m = m(r)$ an. Die Berücksichtigung der Feldmasse $= m(r) - m(r_0)$ führt zu einer Revision der Newtonschen Feldmechanik für die Gravitation.

Die explizite Herleitung einer Gravitodynamik für das Gravitationsfeld in Analogie zur Elektrodynamik wird nicht vorgeführt.

Um dies nachvollziehen zu können, müssen folgende Fragen geklärt werden:

- I. 1. Wie wird der Ansatz für die Quelleneigenschaft des Gravitationsfeldes einer Masse $m(\vec{r})$ begründet? Speziell: Was ist $\text{div } \vec{P} = \frac{\rho}{r^2}$?
2. Warum hat der Normierungsfaktor am Dichteoperator den Wert 16?
3. Wie lauten die Orthogonalitätsbeziehungen zwischen den Feldern g, Γ, μ und $\vec{P}$?
4. Wie lautet das Feldgesetz der gravitativen Energieströmung?
5. Welche Gestalt hat die Transformationsmatrix $\hat{B} = \hat{A}_{(-)} \hat{A}_{(+)}$?
6. Welche Geometrie liegt der nichtquantisierten Kovarianten Feldtheorie zugrunde?

1. Mögliche Ansätze für ein erweitertes Gravitationspotential

(Zu S. 48)

Die explizite Herleitung des Dichteoperators wird von B. Heim im Band II in Aussicht gestellt.

Heim setzt die Quelle für das Gravitationsfeld zusammen aus dem Quellenanteil der Masse m (r_0) und aus der "Feld-Quellen-Masse" $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{G} = \text{div } \mathcal{I}^m + \text{div } \mathcal{P} = (\Delta + \frac{1}{r^2}) \varphi \quad (1)$$

mit

$$\text{div } \mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}}{r^2} \quad (2)$$

Es ist nicht klar, wie diese Beziehung (2) begründet wird.

Die Potentialgleichung (1) hat Ähnlichkeit mit der Neumann-Yukawa-Gleichung:

$$\mathcal{G} = (\Delta - k^2) \varphi \quad (3)$$

mit dem Yukawa-Potential

$$\varphi = -\frac{\chi m}{r} e^{-kr} \quad (4)$$

Dieses Potential setzen z.B. Freud, Maheshwari und Schonberg (1969) an, um eine endliche Reichweite der Gravitation einzuführen.

In der Heimschen Gravitationstheorie ist das Gravitationsfeld ebenfalls begrenzt in einem Abstand $\rho = k^2/(\chi m^3)$ von der Quelle:

$$\varphi = -\frac{\chi m}{r} \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^2 \approx -\chi \frac{m}{r} e^{-\frac{2}{3}r} \quad (5)$$

Man würde erwarten, daß die Potentialgleichung mit $k = \frac{1}{\rho}$ wie Gl (3) aussähe.

Wird der d'Lambertoperator Δ durch den Laplaceoperator $\square$ ersetzt, so hat im Falle $q = 0$ die Wellengleichung

$$(\square - k^2) \varphi = 0 \quad (6)$$

die Lösung für ebene Wellen

$$\varphi = e^{i(\omega t + kx)} \quad (7)$$

Der Potentialausdruck muß folgende Bedingungen erfüllen:

- a) $\varphi \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \rho$
- b) $\varphi \neq \infty$ für $r \rightarrow 0$

Bedingung (a) wird zwar von Gleichung (5) erfüllt. Diese Gleichung muß jedoch wegen (b) erweitert werden durch einen Faktor $(1 - e^{-r/\rho})$

$$\varphi_H = -\frac{\gamma m}{r} e^{-\frac{2r}{\rho}} (1 - e^{-\frac{r}{\rho}}) \approx -\frac{\gamma m}{r} \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^2 \left(\frac{r}{r_0(1+r)}\right) \quad (8)$$

Denn dann wäre für $r \rightarrow \rho$ sowohl $\varphi_H = 0$ als auch φ_H endlich für $r \rightarrow 0$. Mit der Kürzung $\psi = -\frac{\gamma m}{r} e^{-\frac{2r}{\rho}}$ gilt eine Wellengleichung mit der Ableitung in 2. Ordnung

$$(1 - r_0^2 \square) \square \psi = 0 \quad (9)$$

Mit (7) erhält man daraus die Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 = c'^2 k^2 (1 + r_0^2 k^2) \quad (10)$$

wenn c' die Ausbreitungsgeschwindigkeit gravitativer Feldstörungen bedeutet. Wegen (10) sind Signal- (bzw. Gruppen-) Geschwindigkeiten

$$v = \frac{d\omega}{dk} = c' \frac{1 + 2r_0^2 k^2}{\sqrt{1 + r_0^2 k^2}} \quad (11)$$

Aus ganz anderen Gründen fand Fujiwara (1980) die Beziehung für die Gruppengeschwindigkeit

$$v \approx c \left[1 + \frac{1}{2} \ell_0^2 k^2 \right]$$

wobei ℓ_0 eine kleinste Länge $< 10^{-17}$ cm sein muß (da die Geschwindigkeitsmessungen an 10 GeV-Photonen $\Delta c < 10^{-17}$ lieferten.) Er fand die Verletzung der linearen ω - k Beziehung allein durch die Untersuchung der Lichtausbreitung im Vakuum, wenn unterstellt wird, daß der 3-dimensionale Raum eine Quantenstruktur besitzt.

Da $r_0^2 k^2 \ll 1$ bleibt ($r_0^2 = \tau \approx 10^{-70} \text{ cm}^2$), bleibt auch für sehr kleine Wellenlängen $\lambda \approx \frac{1}{k}$ der Beitrag von $k^2 r_0^2$ zu (11) vernachlässigbar. D.h. Gl. (9) ist "nahezu invariant" gegenüber Lorentztransformationen (Pavlopoulos 1967).

Im statischen Falle wird aus (9)

$$(1 - r_0^2 \Delta) \Delta \psi = q \quad (12)$$

Im sphärisch symmetrischen Fall gilt mit dem entsprechenden Laplaceoperator

$$\Delta \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$q = \left[1 - r_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \gamma \frac{m(r)}{r} \left(1 - \frac{r}{\rho} \right)^2 \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{\gamma} = & \frac{1}{r} \frac{d^2 m}{dr^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{r}{\rho} \frac{d^2 m}{dr^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dm}{dr} + \frac{2m}{r\rho^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d^2 m}{dr^2} - \frac{4}{r} \frac{dm}{dr} \right) - \\ & - \frac{r_0^2}{r} \frac{d^4 m}{dr^4} + \frac{r_0^2}{\rho} \left(2 \frac{d^4 m}{dr^4} + \frac{8}{r} \frac{d^3 m}{dr^3} - \frac{4}{\rho} \frac{d^3 m}{dr^3} - \frac{1}{\rho} \frac{d^4 m}{dr^4} - \frac{8}{r} \frac{d^3 m}{dr^3} - \frac{2}{\rho r} \frac{d^3 m}{dr^3} \right) \end{aligned} \quad (12b)$$

Wird der Quellenbeitrag zum Feld im Abstand $r=\rho$ untersucht, dann gilt die Näherung $\lim_{r \rightarrow \rho} q$:

$$\frac{q}{2\gamma} = - \frac{1}{\rho^2} \frac{dm}{dr} + \frac{m}{r^3} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{V} - 3 \frac{d}{dV} \right) \rho^3 m \quad (13)$$

An der Grenze $r=\rho$ verschwindet $\frac{dm}{dr}$, und die Massendichte σ , die auf das Gesamtvolumen $V = V_\rho$ bezogen wird, ist

$$\frac{3q}{8\pi\gamma} = \frac{m}{V_\rho} = \sigma \quad (14)$$

Wird der Quellenbeitrag zum Feld an der Oberfläche der Quelle $m_0 = m(r_0)$ genommen, so ist $\lim_{r \rightarrow r_0} q$:

$$\frac{q}{\gamma} = \frac{1}{r} \frac{d^2 m}{dr^2} - \frac{r_0^2}{r} \frac{d^4 m}{dr^4} \quad (15)$$

Ist nun r_0 eine prinzipiell nicht unterschreitbare kleinste Länge, so wird im Grenzfall das Differential zur Differenz der Größe r_0 : $\Delta r \rightarrow \Delta r = r_0$. In diesem Fall verschwindet die rechte Seite von (15).

Heim verwendet weder die Potentiale (3) noch (12) in Gleichung (1). Die Begründung der Wahl (1) bleibt also noch offen.

Folgt man Heims Quellenbeziehung (1), so ist

$$\frac{q}{\gamma} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) \frac{m(r)}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{m(r)}{r} \quad (16)$$

$$= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dm}{dr} - \frac{m}{r^2} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{dm}{dr} - \frac{2m}{r^3} + \frac{m}{r^3} = \frac{1}{r} \frac{d^2 m}{dr^2} + \frac{m}{r^3}$$

$$= 4\pi r \frac{d}{dV} \left(r^2 \frac{dm}{dV} + \frac{m}{3V} \right) = 4\pi r^3 \frac{d^2 m}{dV^2} + \frac{4\pi r dr^2}{4\pi r^2 dV} \frac{dm}{dV} + \frac{m}{r^3} \quad (17)$$

$$\frac{3}{4\pi \gamma} q = 9V \frac{d^2 m}{dV^2} + 6 \frac{dm}{dV} + \frac{m}{V} = \Omega ; m$$

Soll der Dichteoperator Ω

$$\Omega = \frac{1}{V} \left(9V^2 \frac{d^2}{dV^2} + 6V \frac{d}{dV} + 1 \right) \quad (18)$$

einfacher geschrieben werden, so gilt mit der Vereinbarung

$$\left(\frac{d}{dV} \right)^2 ; m \hat{=} \frac{d^2 m}{dV^2} \quad (19)$$

$$\Omega = \frac{1}{V} \left[3V \left(\frac{d}{dV} \right) + 1 \right]^2 \quad (20)$$

2. Der Wert des Normierungsfaktors im Dichteoperator (Zu Seite 48)

Den Normierungsfaktor gewinnt man aus (20) durch den Grenzübergang $r \rightarrow r_0$. Die Differentiale dV werden zu Differenzbeträgen. Denn $\frac{dm}{dr}$ bedeutet die Massenänderung bezogen auf die Kugelschale mit dem Radius r und der Dicke dr . Die Kugelschale enthält eine endliche Energiedichte $d\eta = c^2 \frac{dm}{dV}$, die wegen des Quantenprinzips auch einen endlichen Wert behalten muß, d.h.

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \eta = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{m c^2}{V} \Rightarrow \frac{dm}{dV} c^2 = \frac{m_0}{V_0} c^2 = \eta_0 \quad (21)$$

oder einzeln

$$\lim_{r \rightarrow r_0} V \frac{d}{dV} = 1$$

und

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \left(\frac{dm}{dV} \right) = \frac{m_0}{V_0} = \sigma_0 \quad (22)$$

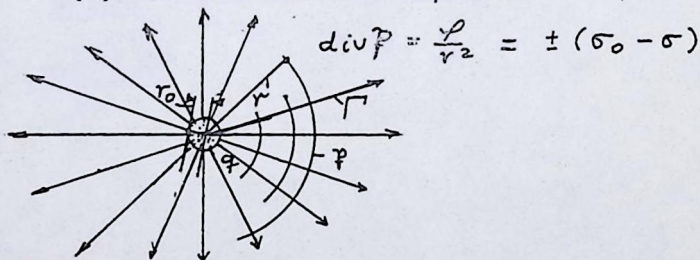
Damit wird in (20) der Grenzübergang unter Beachtung der Limiten-Multiplikationsregel:

$$\begin{aligned} \frac{3g}{4\pi\gamma} &= g \lim_{r \rightarrow r_0} \left(V \frac{d}{dV} \right) \lim_{r \rightarrow r_0} \left(\frac{dm}{dV} \right) + 6 \lim_{r \rightarrow r_0} \left(\frac{dm}{dV} \right) + \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{m}{V} \quad (23) \\ &= 16 \sigma_0 \end{aligned}$$

3. Orthogonalitätsbeziehungen zwischen den Gravitationsfeldvektoren

(Zu Seite 49)

Die Massendichte $\sigma(r)$ ist mit dem Dichteoperator Ω : $\sigma = \Omega; m$



Für den Übergang $r \rightarrow r_0$ stellt $\sigma_0 = \frac{m(r_0)}{V_0}$ die Dichte der ponderablen Masse dar

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \Omega; m = \sigma_0 \quad (1)$$

Der durch $m(r)$ bedingte Anteil $m_0 - m \neq 0$ der Quellenverteilung

$$\sigma_0 - \sigma = \Omega; (m_0 - m) \quad (2)$$

kann als Quelle eines Vektorfeldes $\vec{P}$ aufgefaßt werden

$$\boxed{\pm (\sigma_0 - \sigma) = \text{div } \vec{P}} \quad (3)$$

Das Gravitationsfeld $\Gamma = \text{grad } \varphi = \text{grad} \left(\gamma \frac{m(r)}{r} \right)$ wird durch die Massendichte $\sigma(r)$ als Quelle beschrieben

$$\text{div } \Gamma \sim \sigma \quad (4)$$

bzw.

$$\boxed{\alpha \text{div } \Gamma = \sigma} \quad \text{mit} \quad \boxed{\alpha = \frac{3}{64\pi\gamma}} \quad (5)$$

($\mathcal{P}$ würde formal der dielektrischen Polarisation und Γ der Feldstärke der Elektrostatik entsprechen).

Die Feldquelle kann nunmehr auf σ_0 reduziert werden:

$$\sigma_0 = \alpha \text{div } \Gamma \pm \text{div } \mathcal{P} \quad (6)$$

$$\frac{\sigma_0}{\alpha} = \text{div} \left(\Gamma \pm \frac{\mathcal{P}}{\alpha} \right) = \text{div } g$$

oder mit dem neuen Feldvektor $\boxed{g = \Gamma \pm \frac{1}{\alpha} \mathcal{P}} \quad (7)$

$$\boxed{\alpha \text{div } g = \sigma_0} \quad (8)$$

(g entspräche formal der dielektrischen Verschiebung $\mathcal{D}_{el} = \epsilon_{el} \mathcal{E} + \mathcal{P}_{el}$)

g ist der Beschleunigungsvektor $g = \gamma \frac{m}{r^2} \left(\frac{r}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{m}$

Aus (3) geht hervor, daß am Ort der ponderablen Masse m_0 , d.h. für $r \rightarrow r_0$ der Beschleunigungsvektor g mit dem Feldvektor Γ identisch ist.

Wegen des stetigen Anschlusses der Feldlinien sind die Vektoren parallel ($g \parallel \Gamma$)

Im dynamischen Fall gilt die Kontinuitätsgleichung für zeitlich variable Dichtediskontinuitäten in einem von einer Kugelfläche umgebenen Volumen:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \sigma_0) \quad (9)$$

oder wegen (8) auch

$$\operatorname{div}(\alpha \dot{g} + \rho \sigma_0) \equiv \operatorname{div} \mu = 0 \quad (10)$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn die Klammer als Rotation ^{aufgefaßt} eines Vektors _{μ} werden kann:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mu = \alpha \dot{g} + \rho \sigma_0} \quad (11)$$

Die Feldlinien des μ -Zusatz- oder "Mesofelds" sind nach Heims Auffassung gerade diejenigen Orthogonaltrajektorien, die bei gravitativen Wechselwirkungen die Niveauflächen des $\bar{g}$ -Feldes exzentrisch deformieren, so daß für $\rho \sigma_0 = 0$ durch das induzierte Dichtegefälle von g eine ponderomotorische Kraftdichte entsteht. Diese Annahme führt auf die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{g} \perp \mu \\ \dot{r} \perp \mu \end{array}} \quad (\text{s. Seite 7}) \quad (12)$$

Aus (11) und (12) folgt

$$\alpha \mu \dot{g} = \mu \operatorname{rot} \mu = 0 \quad (13)$$

Fordert man, daß entsprechend wie in der Elektrodynamik eine allgemeine Wellengleichung mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c' existieren soll, dann tritt zu den Vakuumfeldgleichungen

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{div} g = 0, \operatorname{div} \mu = 0 \\ \alpha \dot{g} = \operatorname{rot} \mu \end{array}} \quad (14)$$

noch die Beziehung

$$\boxed{\beta \mu = \operatorname{rot} g} \quad (15)$$

hinzu. Und die der Elektrodynamik analogen Wellengleichungen lauten folglich $\square_{\omega}(\sigma, \mu) = 0$ d.h.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}(\sigma, \mu) = \pm \alpha \beta \frac{d^2}{dt^2}(\sigma, \mu) \quad (16)$$

wobei $\alpha \beta = \frac{1}{\omega^2} = \mp \frac{1}{c^2}$ gesetzt werden kann.

Aus (12) und (15) folgen die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\begin{array}{l} \dot{\mu} \perp \sigma \\ \dot{\mu} \perp \Gamma \end{array} \quad (17)$$

Wegen (15) und (17) ist $\mathcal{P}$ nach (7)

$$\operatorname{rot} \sigma = \operatorname{rot} \Gamma \pm \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathcal{P} = \beta \dot{\mu} \quad (18)$$

$$\mathcal{P} \perp \dot{\mu} \quad (19)$$

Damit kann entweder $\mathcal{P} \parallel \Gamma$ gelten oder $\mathcal{P} \perp \Gamma \perp \dot{\mu}$.
Es ist $\Gamma \parallel \dot{\Gamma}$ und $\dot{\Gamma} \perp \dot{\mu} \parallel \mu$ also

$$\sigma, \Gamma \perp \mu \quad (20)$$

Für die Quellenverteilung von μ gilt

$$\operatorname{div} \mu = \omega (\sigma - \sigma_0) \quad (21)$$

und mit (3) somit

$$\mu = \omega \mathcal{P} \quad (22)$$

d.h.

$$\begin{array}{l} \mathcal{P} \parallel \mu \\ \mathcal{P} \perp \Gamma \end{array} \quad (23)$$

aber wegen (14) und (12)

$$\dot{\mathcal{P}} \parallel \dot{\Gamma} \parallel \Gamma \quad (24)$$

Im "gravitostatischen Fall" ist

$$\operatorname{rot} \Gamma = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad (25)$$

Im "gravidynamischen Fall" läßt sich dagegen das von dem variablen Feld μ induzierte Feld nicht mehr als Gradient eines Potentials darstellen und ist somit nicht mehr wirbelfrei.

4. Die gravitative Energieströmung in Heims Theorie (Zu Seite 49)

Im Gegensatz zum elektrodynamischen Fall findet in der Gravidynamik keine Energieabstahlung, definiert durch den Poyntingvektor $\vec{\sigma} = \vec{g} \times \vec{\mu}$, statt:

Im Eigensystem ($\omega = 0$) ist die quellenfreie gravitative Feldstörung definiert durch die gravitative Energieströmung: (analog wie in der Elektrodynamik für $\vec{E}$)

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} g^2 \quad (26)$$

Mit

$$g^2 = \Gamma^2 + \frac{\beta}{\alpha} \mu^2, \quad \omega^2 = \frac{1}{\alpha\beta} \quad (27)$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \Gamma^2 + \beta \mu^2) &= \frac{\partial}{\partial t} (\alpha g^2 - \beta \mu^2) + \beta \mu \dot{\mu} = 0 \\ &= \text{div}(\vec{g} \times \vec{\mu}) + \beta \mu \dot{\mu} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial t} g^2 = \alpha g \dot{g} = g \text{rot} \mu \quad (29)$$

ist

$$g \text{rot} \mu - \beta \mu \dot{\mu} + \beta \mu \dot{\mu} = 0 \quad (30)$$

worin wegen (20) $g \text{rot} \mu = 0$

und daher

$$\text{div}(\vec{g} \times \vec{\mu}) = \mu \text{rot} g \underset{0}{=} \quad (31)$$

bzw. wegen

$$\begin{aligned} g \times \mu &= \Gamma \times \mu \\ \text{div}(\Gamma \times \mu) &= \mu \text{rot} \Gamma \end{aligned} \quad (32)$$

oder in (28) eingesetzt

$$\text{div}(\Gamma \times \mu) = \beta \mu \dot{\mu} \quad (33)$$

(32) und (33) führen zu

$$\beta \mu \dot{\mu} + \mu \operatorname{rot} \dot{\mu} = \mu \operatorname{rot} \Gamma + \beta \omega \mu \operatorname{rot} \mu \quad (34)$$

bzw. $\beta \dot{\mu} = \operatorname{rot} \Gamma + \frac{1}{\omega} \operatorname{rot} \mu \quad (35)$

$$\operatorname{rot} \Gamma = \beta \dot{\mu} - \frac{1}{\omega} \dot{\mu} = -\frac{\dot{\Gamma}}{\omega} \quad (36)$$

Wegen $\dot{\Gamma} \perp \mu$ wird aus (32) und (36)

$$\operatorname{div} (\Gamma \times \mu) = \mu \operatorname{rot} \Gamma = -\frac{\mu \dot{\Gamma}}{\omega} = 0 \quad (37)$$

5. Die Heim-Lorentz-Transformationsmatrix

(z. Seite 14 und Seite 50)

Die Lorentztransformation besagt, daß die Naturgesetze in gleichmäßig gegeneinander bewegten Koordinatensystemen dieselbe Gestalt haben. Die Transformation von einem System K zu einem System K' wird durch die lineare Transformation mit der Matrix $\hat{A} = \alpha_n^m$ ausgedrückt.

Für die Koordinaten gilt:

$$x_\lambda = \sum_{\lambda=1}^4 \alpha_\lambda^\nu x_\nu' \quad (1)$$

Die Quadratsumme der 4 Koordinaten $\sum_{\lambda=1}^4 \alpha_\lambda^{(\nu)2} = 1$ ist invariant. Von den 16 Koeffizienten bleiben 6 willkürlich (3 Freiheitsgrade für die räumlichen Drehungen und 3 für die Relativgeschwindigkeiten zwischen K und K'). Für die Lorentz-Transformationsmatrix gelten die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{\lambda=1}^4 \alpha_\mu^\lambda \alpha_\lambda^\mu = \hat{A} \hat{A}' = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^4 \alpha_\nu^{(\lambda)} \alpha_\mu^{(\lambda)} = 0 \quad (2)$$

Jede Determinante läßt sich als Summe der Produkte der Unterdeterminanten darstellen. Sind z.B. $A_{(-)}$ und $A_{(+)}$ zwei verschiedene Lorentz-Determinanten, die Unterdeterminanten einer Determinante B sind, so gilt

$$B = \sum_{\lambda < \mu} \sum_{\nu < \rho} A_{\lambda\mu(-)}^{\rho\sigma} A_{\lambda\nu(+)}^{\sigma\rho} \quad (3)$$

$$B = \det \hat{B} = |\hat{B}|$$

Für das elektromagnetische Relativitätsprinzip ist die Transformationsmatrix mit $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\hat{A}_{(-)} = \begin{pmatrix} (1-\beta^2)^{-1/2} & 0 & 0 & -i\beta(1-\beta^2)^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta(1-\beta^2)^{-1/2} & 0 & 0 & (1-\beta^2)^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Diese Matrix ist hermitesch, weil die konjugiert komplexe und transponierte Matrix $\hat{A}_{(-)}^{*}$ identisch ist mit Matrix $\hat{A}_{(-)}$ ist (z.B. $a_{14} = -i\beta(1-\beta^2)^{-1/2} \triangleq (a_{41})^* = \{i\beta(1-\beta^2)^{-1/2}\}^*$, und die Hauptreihenelemente sind reell)

Nach Heim gilt für die Ausbreitung gravitativer Feldstörungen das Ausbreitungsgesetz

$$\square_{\omega} \varphi = \Delta \varphi + \frac{d^2 \varphi}{dx_{+4}^2} = \Delta \varphi + \frac{d^2 \varphi}{\omega^2 dt^2} \quad (5)$$

Die "Geschwindigkeit" ω ist auf eine andere Koordinate als die Zeit $x_4 = ict$ bezogen, die mit $x_{+4} = \omega t$ bezeichnet wird. Die Lorentz-Transformationen für $\beta' = \frac{v}{\omega}$ sind für ein in x-Richtung bewegtes System K:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - \beta' x_4}{\sqrt{1 + \beta'^2}} \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= \frac{x_4 + \beta' x_1}{\sqrt{1 + \beta'^2}} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Transformationsmatrix ist reell

$$\hat{A}_{(+)} = \begin{pmatrix} (1+\beta'^2)^{-1/2} & 0 & 0 & -\beta'(1+\beta'^2)^{-1/2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta'(1+\beta'^2)^{-1/2} & 0 & 0 & (1+\beta'^2)^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Für $\omega \rightarrow \infty$ wird daraus die Einheitsmatrix, d.h. die Transformation ist regulär. Das Matrizenprodukt $\hat{A}_{(+)}^2 = \hat{A}_{(+)} \hat{A}_{(+)}' = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda(+)} \alpha_{\lambda(+)}' = \hat{E}$ liefert die Einheitsmatrix, d.h. $\hat{A}_{(+)}$ ist orthogonal.

Da die Matrizen $\hat{A}_{(-)}$ aus (4) und $\hat{A}_{(+)}$ aus (7) kommutieren:

$$(\hat{A}_{(-)} \times \hat{A}_{(+)}) \equiv (\hat{A}_{(-)} \hat{A}_{(+)} - \hat{A}_{(+)} \hat{A}_{(-)}) = \delta,$$

können sie nach (3) als Untermatrizen einer übergeordneten Matrix aufgefaßt werden:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \frac{1-\beta\beta' i}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1+\beta'^2}} & 0 & 0 & \frac{-i\beta - \beta'}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1+\beta'^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\beta + \beta'}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1+\beta'^2}} & 0 & 0 & \frac{1-\beta\beta' i}{\sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1+\beta'^2}} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Für $\hat{B}$ gelten wiederum die Orthogonalitätsbeziehungen (2):

$$\hat{B} \hat{B}' = \sum_{\nu=1}^4 \hat{A}_{(+)\nu\nu} \hat{A}_{(-)\nu\nu} \hat{A}_{(+)\nu\mu}' \hat{A}_{(-)\nu\mu}' \quad (9)$$

$$\text{z.B. } \hat{B}_{1\nu} \hat{B}_{\nu 1}' = \sum_{\nu} A_{1\nu} A_{(-)\nu 1}' A_{(+)\nu 1}' A_{(-)\nu 1}' = \frac{(1-i\beta\beta')^2 + (i\beta - \beta')^2}{(1+\beta'^2)(1-\beta^2)} = \quad (10)$$

usw. Somit gilt

$$\hat{B} \hat{B}' = \hat{E} \quad (11)$$

$\hat{B}$ ist die Heim-Lorentz-Transformationsmatrix gegenüber welcher nun Invarianz gefordert werden muß. Im Falle $v > c$ wird wie im elektromagnetischen Relativitätsprinzip die Wurzel imaginär, wie aus $\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - v^2/c^2 + v^2/c^2 (1 - v^2/c^2)}$ leicht zu ersehen ist. D.h. es gilt im R_4 weiterhin die Bedingung $v < c$ für relativistisch bewegte Objekte.

6. Die Einstein-Cartan-Geometrie

Heim begründet seine nichthermitesche Theorie mit der im realen R_4 geltenden Transformationsmatrix bzw. mit der dort geltenden Beziehung für das Linienelement $ds^2 = ds_{(+)}^2 + ds_{(-)}^2$. Diese Nichtsymmetrie wird im Hinblick auf die im realen R_4 vorzunehmende Vereinheitlichung elektromagnetischer und gravitativer Felder, also aus phänomenologischen (physikalischen) Gründen, eingeführt.

Es lassen sich jedoch ebenso gut geometrische (strukturtheoretische) Gründe für die Nichthermitizität vorbringen. Dieser Weg wird im Rahmen der Erweiterung der Einsteintheorie von vielen Autoren gegangen (z.B. Kibble 1961, Sciama 1958, Hehl u.a. 1976, Trautman 1975 u.a.).

Wie bereits Einstein (1949, siehe 1956) und Cartan (1922), so verwendet Heim die allgemeinste Darstellung der affinen Verschiebungssymbole

$\Gamma_{km}^i \neq \Gamma_{mk}^i$. Während die Riemanngeometrie symmetrisch ist, d.h. die Verschiebungssymbole identisch sind mit den Christoffel-Symbolen $\{\overset{i}{\underset{km}{\Gamma}}\}$.

$$(\text{Riemann:}) \quad \Gamma_{km}^i = \{\overset{i}{\underset{km}{\Gamma}}\} = \frac{1}{2} g^{il} (g_{li,k} + g_{kl,m} - g_{km,l}), \quad (1)$$

wobei die Kürzung $_{,j}$ die gewöhnliche Ableitung $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ und ein Semikolon die kovariante Ableitung bezeichnen sollen, verwendet Heim die Einstein-Cartan-Geometrie, in der die Γ_{km}^i nichtsymmetrisch sind. Diese Affin-Tensoren lassen sich in einen symmetrischen (+) und einen antisymmetrischen Anteil (-) aufspalten:

$$\begin{aligned} \Gamma_{km}^i &= \Gamma_{(+)km}^i + \Gamma_{(-)km}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{km}^i + \Gamma_{mk}^i) + \frac{1}{2} (\Gamma_{km}^i - \Gamma_{mk}^i) = \\ &= \frac{1}{2} g^{il} (g_{ik,m} + g_{mi,k} - g_{km,i}) + \frac{1}{2} (C_{km}^i + C_{mk}^i - C_m^i{}^k{}^i) \end{aligned} \quad (2)$$

Die erste Klammer ist identisch mit den Christoffelsymbolen $\{\overset{i}{\underset{km}{\Gamma}}\}$. Die zweite Klammer wird Cartans Torsionstensor genannt.

$$C_{ij}^{\quad k} \equiv \Gamma_{[ij]}^{\quad k} = \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^{\quad k} - \Gamma_{ji}^{\quad k}) \neq 0 \quad (3)$$

Die nichtsymmetrischen Γ_{km}^i aus (2) werden mit dem Kontorsionstensor $K_{ij}^{\cdot\cdot\cdot K}$ (Schouten, 1954, S.126)

$$K_{ij}^{\cdot\cdot\cdot K} = \frac{1}{2} (-C_{ij}^{\cdot\cdot\cdot K} + C_j^{\cdot\cdot\cdot K}{}_{;i} - C^{\cdot\cdot\cdot K}{}_{;ij}) = -K_{i\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot K}{}_{;j} \quad (4)$$

zusammengefaßt in:

$$\Gamma_{km}^i = \{ \kappa_{km}^i \} - K_{ij}^{\cdot\cdot\cdot K} \quad (5)$$

("Riemann-Cartan-Zusammenhang")

Die kovariante Ableitung der Riemann-Geometrie

$$\nabla_i \equiv \partial_i - \Gamma_{ke}^i \quad (6)$$

wird zur kovarianten Ableitung der Riemann-Cartan-Geometrie

$$\overset{*}{\nabla}_i \equiv \nabla_i + 2 C_{ik}^{\cdot\cdot\cdot K} \quad (7)$$

Der Riemann-Cartan-Raum wird als U_4 bezeichnet.

Es gelten die 2 Arten der kovarianten Ableitung:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_j g_{ik}^{(+)} &= g_{ik;j}^{(+)} = g_{ik,j}^{(+)} - g_{ir}^{(+)} \Gamma_{kj}^r - g_{rk}^{(+)} \Gamma_{ij}^r + g_{ir}^{(+)} C_{kj}^r + g_{rk}^{(+)} C_{ij}^r = 0 \\ \overset{*}{\nabla}_j g_{ik}^{(-)} &= g_{ik;j}^{(-)} = g_{ik,j}^{(-)} - g_{ir}^{(-)} \Gamma_{kj}^r - g_{rk}^{(-)} \Gamma_{ij}^r + g_{ir}^{(-)} C_{kj}^r + g_{rk}^{(-)} C_{ij}^r = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(Ingreham, 1949)

Der Krümmungstensor besteht aus 2 Anteilen. Wird er, wie üblich, hergeleitet aus der Vertauschung der doppelten kovarianten Ableitung eines Vektors, so gilt

$$\alpha_{;\mu;\nu} - \alpha_{;\nu;\mu} = R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} \alpha_{;\rho} - C_{\mu\nu}^{\lambda} \alpha_{;\lambda} \quad (9)$$

Der Ricci-Tensor um U_4 besteht aus den Anteilen $G_{ij}^{(+)}$ und $G_{ij}^{(-)}$:

$$G_{ij}^{(+)} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ik} R_k^k \quad (10)$$

$$G_{ij}^{(-)} = \nabla_k^* T_{ij}^{\quad k} \quad (11)$$

mit

$$T_{ij}^{\quad k} = C_{ij}^{\quad k} + 2 \delta_i^h C_{je}^{\quad l} - 2 \delta_j^h C_{ie}^{\quad l} \quad (12)$$

In die Autoparallele geht nur der symmetrische Anteil ein:

$$\Gamma_{ij}^k = \{j_i^k\} + 2 C_{ij}^k. \quad \text{Die Autoparallele lautet im } U_4$$

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (13)$$

Die Geodäte, welche aus der Variation des Integrals über das Linienelement genommen wird $\delta \int ds = 0$ ist

$$\ddot{x}^k + \{k_e^i\} \dot{x}^k \dot{x}^e = 0 \quad (14)$$

Wenn die Torsion total antisymmetrisch ist: $S_{ijk} = S_{[ijk]}$, dann sind im U_4 Autoparallelen (13) und Geodäten (14) gleich (Hehl u.a. 1976).

Heims Geometrie im R_4 ist im nichtquantisierten bzw. nichtmetronisierten Fall die Einstein-Cartan-Geometrie mit den oben beschriebenen Eigenschaften. Man verwendet diese Geometrie neuerdings, um die Torsion (3) in die Geometrie einzuführen, z.B. um durch einen Rotationsterm die kosmologische Singularität am Zeitursprung in der allgemeinen Relativitätstheorie zu umgehen (z.B. Kuchowicz 1975), oder um den Begriff des Spins in die Geometrie einzuführen (z.B. Ulmer 1975). Einstein hatte gehofft (1949), mit dem Rotationsterm elektromagnetische neben gravitativen Feldern gemeinsam beschreiben zu können.

Die phänomenologische Entsprechung der strukturellen Rotation ist also bis heute noch unklar. Der phänomenologische Quellen- und Feldanteil wird seit Einstein durch Variation einer geeigneten Lagrangefunktion $\mathcal{L}$, die auf die Feldgleichungen führt, berücksichtigt.

Die Feldgleichungen werden aus einem Variationsprinzip $\delta \mathcal{L}$ hergeleitet, was zwar den Vorteil hat, daß die Kompatibilität des resultierenden Gleichungssystems gewährleistet wird und daß die mit der allgemeinen Kovarianz verbundenen Identitäten ("Bianchi"-Identitäten) sowie die Erhaltungssätze sich in systematischer Weise ergeben. Aber der Nachteil dieser Herleitung liegt in der Willkür des in dem zu variierenden Integral zu wählenden Integranden $\mathcal{L}$ (der eine skalare Dichte $\mathcal{L} = L \sqrt{-g}$ sein muß).

7. Einsteins unsymmetrische einheitliche Feldtheorie

Im folgenden soll kurz der gegenwärtige Stand in der Untersuchung der einheitlichen Feldtheorie Einsteins gezeigt werden:

Der Einsteinsche Ansatz für die Wirkungsfunktion $\mathcal{W}$ führte zu Widersprüchen (siehe z.B. Sen 1955). Bonnor (1954) verwendete eine Wirkungsfunktion, mit welcher Lorentz-Bewegungsgleichungen nach der Einstein-Infeld-Hoffmann Methode (1938) gewonnen werden konnten.

$$\mathcal{W} = (g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \frac{4\pi}{K^2} g^{\mu\nu} g_{[\mu\nu]}) \sqrt{-g} \quad (1)$$

mit $g_{[\mu\nu]} = g_{\mu\nu}^{(-)}$ und

$$G_{\mu\nu} = \partial_\alpha C_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2} (\partial_\nu C_{\mu\alpha}^\alpha + \partial_\mu C_{\nu\alpha}^\alpha) - C_{\mu\sigma}^\alpha C_{\alpha\nu}^\sigma + C_{\mu\nu}^\alpha C_{\alpha\sigma}^\sigma \quad (2)$$

Da der Zusammenhang $C_{\mu\nu}^\alpha$ durch die aus der Variation von $\mathcal{W}$ folgenden Feldgleichungen unterbestimmt ist (Einstein 1955), wählten Boal und Noakes (1979) anstelle von $C_{\mu\nu}^\alpha$ die durch (6.12) definierten $T_{\mu\nu}^\alpha$ in (2) bzw. (1) und erhielten folgende Feldgleichungen

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\mu\sigma} T_{\alpha\nu}^\sigma - g_{\sigma\nu} T_{\mu\alpha}^\sigma = 0 \quad (3)$$

$$T_{[\mu\alpha]}^\alpha = \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{[\mu\alpha]}) = 0 \quad (4)$$

$$R_{[\mu\nu]} + I_{[\mu\nu]} = \frac{1}{3} (C_{\mu\sigma}^\sigma - C_{\sigma\mu}^\sigma)_{,\nu} - \frac{1}{3} (C_{\nu\sigma}^\sigma - C_{\sigma\nu}^\sigma)_{,\mu} \quad (5)$$

$$R_{(\mu\nu)} = -I_{(\mu\nu)} \quad (6)$$

$$I_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{K^2} (g_{\mu\sigma} g^{\sigma\tau} g_{\tau\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\tau} g_{\sigma\tau} + g_{[\mu\nu]}) \quad (7)$$

worin $R_{\mu\nu}$ wie in (2) aber mit $T_{\mu\nu}^\alpha$ anstelle von $C_{\mu\nu}^\alpha$ aufgebaut ist.

Im statischen sphärisch symmetrischen Fall können diese Gleichungen exakt gelöst werden und liefern für das quadratische Linienelement

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k^2 Q^2}{r^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (8)$$

m und Q bedeuten Masse und Ladung und die Konstanten c und γ wurden = 1 gesetzt. Das einzige von Null verschiedene Element von $g_{[\mu\nu]}$ ist $g_{[14]} = \frac{kQ}{r^2}$. Das legt die physikalische Interpretation mit dem elektromagnetischen Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}$ nahe:

$$g_{[\mu\nu]} = k F_{[\mu\nu]}$$

Für $k \rightarrow 0$ erhält man die Feldgleichungen der Einstein-Maxwell-Theorie:

$$\begin{aligned} \text{(aus 5:)} \quad & - \left(\frac{8\pi}{k}\right) F_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} - \varphi_{\nu,\mu} \quad \text{mit} \quad \varphi_{\mu,\nu} = \frac{1}{3} (C_{\mu\sigma}^\sigma - C_{\sigma\mu}^\sigma)_{,\nu} \\ \text{(aus 4:)} \quad & \partial_\alpha (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

und die Feldgleichungen mit symmetrischen $g_{\mu\nu}$ und $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \sigma_{\mu\nu} \quad (12)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = F_{\mu}^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (13)$$

$$g_{\mu\nu};\alpha = 0 \quad (14)$$

Aus (10) folgt, daß $-\frac{8\pi}{k} \varphi_\mu = \alpha_\mu$ das elektromagnetische Potential ist.

α_μ ist eine Funktion von k:

$$\begin{aligned} A_i &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ A_4 &= \frac{Q}{r} - \frac{k^2 Q m}{8\pi r^4} - \frac{k^2 Q^3}{2r^5} \end{aligned} \quad (15)$$

Die Eigenschaften dieser Theorie wurden z.B. von Kunstatter und Moffat (1978) näher untersucht. Boal und Noakes (1979) analysierten die Lichtausbreitung in dieser nichtsymmetrischen einheitlichen Feldtheorie und zeigten, daß die Längen von Vektoren bei Parallelverschiebungen nicht erhalten bleiben, wie in der Weylschen Geometrie.

Soll z.B. das Produkt zweier Vektoren A^μ und B^ν entlang einer Bahn verschoben werden, so gilt mit dem affinen Parameter t und dem nichtsymmetrischen Zusammenhang $W^\alpha_{\mu\nu}$

$$\frac{\delta}{\delta t} (g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu) = (g_{\mu\nu,\alpha} - g_{\sigma\nu} W^\sigma_{\mu\alpha} - g_{\mu\sigma} W^\sigma_{\nu\alpha}) K^\alpha A^\mu B^\nu \quad (16)$$

wobei K^α den Tangentenvektor an die Kurve bezeichnet. Ist $W^\alpha_{\mu\nu} \equiv T^\alpha_{\mu\nu}$ so folgt aus (3) $T^\alpha_{[\mu\nu]} = 0$ und die Theorie reduziert sich auf die gewöhnliche allgemeine Relativitätstheorie. Wird $W^\alpha_{\mu\nu}$ mit $C^\alpha_{\mu\nu}$ identifiziert, so ist $C^\alpha_{[\mu\nu]} = 0$ und wegen (5) folgt, daß das Potential $\varphi_\mu \sim \alpha_\mu$ ebenfalls verschwindet. Das bedeutet, daß das Produkt willkürlicher Vektoren (oder z.B. die Länge des Vektors $|A| = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$) bei Parallelverschiebungen nicht erhalten bleibt. (Ein zeitartiger Vektor kann z.B. in einen raumartigen umgewandelt werden).

Die erwähnten Zusammenhänge sind unverträglich mit einem lokal ebenen Bezugssystem, das bei Parallelverschiebung invariant ist. Da die symmetrischen Anteile der Zusammenhänge nicht verschwinden, bleibt auch der 2. Ableitungsterm in der Bewegungsgleichung erhalten:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + T^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (17)$$

Daher läßt sich kein Lorentz-Bezugssystem konstruieren. Es sei denn, man verwendet anstelle von $T^\alpha_{\mu\nu}$ die Christoffelsymbole $\{\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\}$, denn $\{\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\}$ würde verschwinden, wenn $g_{(\mu\nu)} = \eta_{(\mu\nu)}$ als Minkowskitensor genommen wird. Dann hat diese Theorie 3 verschiedene Zusammenhänge, wovon 2 in der Ableitung der Feldgleichung erscheinen und eine die Parallelübertragung definiert.

Ob diese Zusammenhänge sämtlich eine physikalische Bedeutung haben, kann nur die Untersuchung der Lichtausbreitung in dieser Geometrie zeigen. Boal und Noakes zeigten, daß in einem ebenen Minkowski-Raum tatsächlich ebene elektromagnetische und gravitative Wellen existieren. Bei Abwesenheit des elektromagnetischen Hintergrundes breiten sich diese Wellen entlang von Geodäten aus in denen kein Unterschied zwischen den Zusammenhängen erscheint. Bei Anwesenheit des elektromagnetischen Hintergrundes bleibt die Untersuchung zwischen den Zusammenhängen ein noch ungelöstes Problem.

Moffat und Boal (1975) hofften, die Schwierigkeiten bei der Parallelübertragung in unsymmetrischen Geometrien zu umgehen durch Einführung hermitescher

$g_{\mu\nu}^*$, d.h. der antisymmetrische Anteil von $g_{[\mu\nu]}$ ist rein imaginär. Dann ist nach (3) auch $T_{\mu\nu}$ hermitesch in den beiden unteren Indizes. Aus (5) folgt, daß das Potential rein imaginär sein muß. Kombiniert man diese Ergebnisse mit (6.12), so ergibt sich, daß $C_{\mu\nu}^{\alpha}$ weder hermitesch noch allgemein komplex sind (z.B. $C_{\beta\beta}^{\alpha}$ ist reell aber $C_{\beta\beta}^{\beta}$ komplex).

Werden die hermiteschen $g_{\mu\nu}^*$ in (16) verwendet, so ändert sich nichts an den bereits geschilderten Problemen. Werden die Betrachtungen auf komplexe Vektoren ausgedehnt, dann kann ein Produkt definiert werden, was invariant bleibt, nämlich $g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu\dagger}$, wenn das Kreuz die komplexe Konjugation bedeutet. Das Produkt wird so verschoben, daß zunächst die Vektoren unabhängig voneinander verschoben werden und dann der komplex konjugierte Operator angewendet wird. Damit können die $W^{\sigma\mu\nu}$ in (16) aufgehoben werden. Doch ist der Winkel zwischen den Vektoren komplex, und ein willkürlicher reeller Vektor wird komplex, wenn er entlang einer Kurve verschoben wird (die Länge des Vektors bleibt reell). Die Produktoperation gilt nur für Verschiebungen entlang reeller Vektoren, nicht im allgemein komplexen Fall. Die auftretenden Probleme sind noch ungelöst.

Anders als in (1) setzten Hehl und Kröner (1965) die Lagrangefunktionen für den Energie-Impuls-Tensor σ^{ij} und für den Spindrehimpulstensor μ_k^{ji} im U_4 an:

$$\epsilon \sigma^{ji} = \frac{\delta \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, S_{\mu\nu}^w)}{\delta g_{ji}}, \quad \epsilon, \gamma = \text{const} \quad (18)$$

$$\epsilon \mu_k^{ji} = \frac{\delta \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, S_{\mu\nu}^w)}{\delta S_{ij}^w} \quad (19)$$

Daraus ergibt sich die Wirkungsfunktion für Materie W_2

$$\delta W_2 = \int \varepsilon [\sigma^{ij} \delta g_{ij} + \mu_{\kappa}^{ij} \delta S_{ij}^{\kappa}] dV \quad (20)$$

Die Wirkungsfunktion des Feldes W_1 würde lauten:

$$\delta W_1 = \int \varepsilon \left[\left\{ G^{ij} - \frac{1}{2} \nabla_{\kappa}^* (T^{j\kappa i} - T^{i\kappa j}) \right\} \delta g_{ij} - \left\{ T_{\kappa}^{ij} - T_{\kappa}^{ji} - T_{\kappa}^{ij} \right\} \delta S_{ij}^{\kappa} \right] dV \quad (21)$$

Ausführung der Variationen $\delta W_1 + \delta W_2 = 0$ liefert die Feldgleichungen

$$G^{ij} - \frac{1}{2} \nabla_{\kappa}^* (T^{j\kappa i} - T^{i\kappa j}) = \varepsilon \sigma^{ij} \quad (22)$$

$$T_{\kappa}^{ij} - T_{\kappa}^{ji} - T_{\kappa}^{ij} = \varepsilon \mu_{\kappa}^{ij} \quad (23)$$

Es ist sehr wichtig, wie die Tensoren σ^{ij} und μ_{κ}^{ij} aufgebaut sind. Meistens wird argumentiert, daß σ^{ij} symmetrisch sein muß, weil auch die g_{ik} symmetrisch sind. Diese Begründung kann im U_4 nicht aufrecht erhalten werden.

Beispiel: Einführung des elektromagnetischen Feldes. Seine Lagrange-dichte $\mathcal{L}$ errechnet sich aus der Feldstärke F_{ij}

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{2} \varepsilon g^{ik} g^{j\ell} F_{ij} F_{\kappa\ell} \quad (24)$$

Die Feldstärke F_{ij} ist die Rotation des Vektorpotentials A_i .

$$F_{ij} = 2 \nabla_{[i}^* A_{j]} = 2 \partial_{[i} A_{j]} - 2 S_{ij}^{\kappa} A_{\kappa} = 2 \partial_{[i} A_{j]} - 2 K_{[ij]}^{\kappa} A_{\kappa} \quad (25)$$

(Hierbei wird die speziell-relativistische Gleichung $F_{ij} = 2 \partial_{[i} A_{j]}$ im Cartan-Raum mit $\nabla_{\kappa}^* = \nabla_{\kappa} + 2 S_{\kappa}^{\ell}$ anstelle von $\nabla_{\kappa}^* = \nabla_{\kappa} + 2 K_{\kappa}^{\ell}$ genommen)

mit dem Kontorsionstensor (6.4). Nach (18) und (19) erhält man den symmetrischen Maxwell-Tensor

$$\sigma^{ij} = F^{ik} F^j_{\cdot k} - \frac{1}{4} g^{ik} F^{kl} F_{kl} \quad (26)$$

sowie den Spindrehimpuls-Tensor

$$\mu^{ijk} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K_{ij;\kappa}} = F^{lm} \frac{\partial F_{me}}{\partial K_{ij;\kappa}} = A^j F_{\kappa;\cdot i} - A_{\kappa} F^{ji} \quad (27)$$

Der Formalismus, wie er in den Kapiteln 6 und 7 angegeben ist, wird von Heim ebenfalls verwendet. Doch die physikalische Interpretation ist eine wesentlich andere. Anstelle der Interpretation (6.13) bzw. (7.18 und 25) als elektromagnetischen Feldstärketensor, verwendet Heim einen einheitlichen Energie-Impulsdichtetensor σ^{ij} , der sowohl den elektromagnetischen Anteil als auch den Anteil des Gravitationsfeldes und deren Quellen enthält.

Um Heims Gravitationstheorie verstehen zu können, muß man diesen Heim-schen Energiedichtetensor σ^{ij} kennen, der in einem "realen R_4 " (anstelle von R_{-4} bzw. R_{+4}) definiert ist. Dafür ist es erforderlich, zunächst eine Gravitationstheorie im Minkowskiraum entsprechend der Maxwell-Theorie zu entwickeln. Kennt man den Felstärketensor M_{im} und folglich den Energiedichtetensor $M_{im} M_{mk} = \sigma_{ik}(\mathcal{E}, \mathcal{B}, g, \mu)$ in einer auf solche Weise erweiterten Newton-Theorie im R_{+4} , so muß es ^{sowohl}gelingen, die entsprechenden Tensoren für das elektromagnetische als auch für das gravitative Feld im realen R_4 zu kombinieren. Da dieser einheitliche Energie-Impulsdichtetensor Felder und Quellen bereits einheitlich beschreiben würde, würde man keinerlei zusätzliche phänomenologische Aussagen über die Gravitation bekommen, wenn man σ^{ij} dem nichtsymmetrischen Strukturtensor G^{ij} (z.B. in 6.10 und 11 bzw. 7.12) gleichsetzen würde.

Vielmehr würde man damit ein echtes Äquivalenzprinzip einführen, zwischen rein phänomenologischen und rein geometrischen Beziehungen. In der allgemeinen Relativitätstheorie hingegen ist man durch die Vorentscheidung $g_{ik} \sim \varphi$, daß also die metrischen Koeffizienten dem Newtonschen Potential proportional sind, festgelegt. Und in den Feldgleichungen sind geometrische und physikalische Größen hoffnungslos miteinander verwoben, was die Feldquantisierung der Gravitation so schwierig macht.

Heims einheitliche nichtsymmetrische Feldtheorie im realen R_4 ist nicht allgemein kovariant. Einsteins Gravitationstheorie, die anstelle von "allgemeine Relativitätstheorie", nach Fock, besser als Theorie der allgemeinen Kovarianz bezeichnet werden sollte, gestattet es, das Gravitationsphänomen als eine rein geometrische Eigenschaft des Raum-Zeit-Kontinuums anzusehen. Die allgemeine Kovarianz bedeutet Lorentz- und Eichinvarianz hinsichtlich eines masselosen Spin-2-(Tensor)Feld. Da in Heims Theorie das Feld massiv ist (Masselosigkeit bedeutet Reichweite = ∞ , begrenzte Reichweite bedeutet massive Gravitonen), wird die Eichinvarianz und damit die allgemeine Kovarianz verletzt, d.h. Heims Gravitationstheorie im R_4 ist nicht rein geometrisch interpretierbar. Nach Thirring (1961) ist die geometrische Interpretierbarkeit keineswegs eine Eigenschaft der Gravitation, sondern eher ein Luxus der Einsteinschen Theorie. Eine nicht kovariante Theorie hat den Vorzug, keine Schwierigkeiten bei der Quantisierung zu machen.

Literatur:

- Boal, D.H. und D.R. Noakes 1979: Can. J. Phys., Vol. 57, 79 - 87.
- Bonnor, W.B. 1954: Proc. R. Soc. (London), 226 A, 366
- Cartan, E. 1922: Comptes Rendus (Paris), 174, 593
- Einstein, A., Infeld, L. und Hoffmann, B. 1938: Ann. Math., 39, 65
- Einstein, A. 1945: Ann. Math., 46, 578
- Einstein, A. und Straus, E.G. 1946: Ann. Math., 47, 731
- Einstein, A. 1956: Grundzüge der Relativitätstheorie,
Vieweg, Braunschweig (engl. Ausgabe 1949)
- Freund, P.G.O., A. Maheshwari und E. Schenberg 1989:
Astrophys.J., Vol. 157, Nr. 2, 657
- Fujiwara, K. 1980: Foundations of Physics, Vol. 10, Nr. 3/4, 309
- Heim, B. 1980: Elementarstrukturen der Materie, Resch, Innsbruck
- Hehl, F. und E. Kröner 1988: Ztschr. für Physik, 187, 478
- Hehl, F., P. von der Heyde und G.D. Kerlick 1976:
Reviews of Modern Physics, Vol. 48, Nr. 3, 393 - 416
- Ingreham, R.L. 1950: Ann. Math., Vol. 52, Nr. 3, 743
- Kibble, T.W.B. 1961: J. Math. Phys., Vol. 2, Nr. 2, 212
- Kuchowicz, B. 1975: Acta Phys. Po., B6, 555
- Kunstatler, G. und J.W. Moffat 1978: Phys. Rev., D17, 396
- Moffat, J.W. und D.H. Boal 1975: Phys. Rev., D11, 1375
- Pavlopoulos, T.G. 1967: Phys. Rev., Vol. 159, Nr. 5, 1106
- Sciama, D.W. 1958; Proc. Cambridge Phil. Soc., 54, 72
- Sen, D.K. 1968: Fields and/or Particles, Ryerson Press, Toronto
- Ulmer, W. 1975: Intern. Journ. Theor. Phys., Vol. 13, Nr. 1, 51
- Thirring, W. 1961: Ann. Phys. (N. Y.), 16 96
- Trautman, A. 1975: Ann. N.Y. Acad. Sci., 262, 241