

Das gravitative Magnetfeld einer rotierenden Scheibe

Wir beginnen wieder mit Gl. (4) im Bericht über die rotierende Kugel:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \rho_m \vec{v} . \quad (1)$$

In Zylindergeometrie, dargestellt in Fig. 1, ist $v = r\omega_0$ in Richtung $\hat{e}_\varphi$, so dass das Vektorpotential A nur eine φ -Komponente

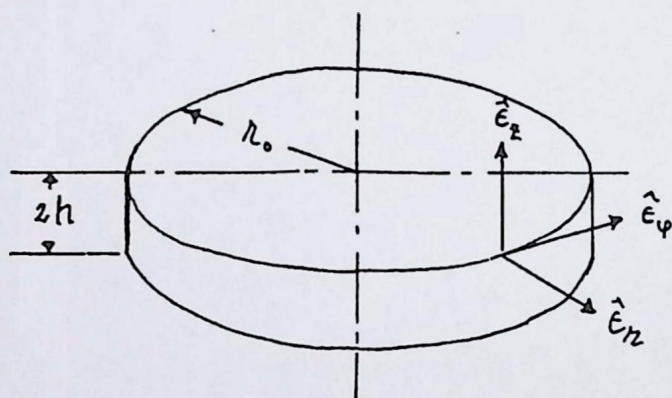


Fig. 1

hat. Für diesen Fall reduziert sich Gl. (1) im Innern der Scheibe zu folgendem Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A(r, z) = -\mu \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \rho_m \omega_0 r , \quad (2)$$

wobei unter $A(r, z)$ die Komponente $A_\varphi(r, z)$ zu verstehen ist.

Die Lösung von Gl. (2) setzt sich, wie immer, aus der Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Für die Lösung der homogenen Gleichung,

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_h(r, z) = 0 , \quad (3)$$

macht man den üblichen Separationsansatz

$$A_h(r, z) = R(r) Z(z) . \quad (4)$$

Die Funktionen $R(r)$ und $Z(z)$ erfüllen dann die Gleichungen

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + c^2 Z(z) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\pm c^2 - \frac{1}{r^2} \right) R(r) = 0 .$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen, die bei $r=0$ endlich und bezüglich der $z=0$ -Ebene symmetrisch sind, sind je nach Wahl des oberen oder unteren Vorzeichens von c^2

oberes Vorzeichen: $J_1(c r) \cos c z$ (6a)

unteres Vorzeichen: $I_1(c r) \cos c z$ (6b)

(J_1, I_1 = Besselfunktionen der Ordnung 1).

Wenn $c=0$ ist, liefert Gl. (6) nur die triviale Lösung 0, weil die Besselfunktionen für das Argument 0 verschwinden. Die Lösungen von Gl. (5) für $c=0$ sind aber keineswegs trivial, sondern ergeben

$$Z_0(z) = \alpha + \beta z \quad (7)$$

$$R_0(r) = \gamma r + \frac{\delta}{r} .$$

Die reguläre, symmetrische Lösung für $c=0$ ist demnach Ar.

Es erweist sich in unserem Fall als günstiger, Lösungen vom Typ (6a) zu wählen. Damit wird die vollständige Lösung der homogenen Gleichung

$$A_h(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(c_n r) \cos c_n z + A_r . \quad (8)$$

Eine partikuläre Lösung von Gl. (2) ist

$$A_p(r, z) = -\alpha r^3 \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{\mu}{g} \sqrt{\frac{b}{\mu_0}} \int_{\omega_0} \omega_0 ,$$

wie sich leicht nachrechnen lässt. Damit wird das endgültige Vektorpotential

$$A(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(c_n r) \cosh c_n z - a r^3 + A r. \quad (10)$$

Randbedingungen

Im Fall der rotierenden Kugel kennen wir das Feld sowohl im Innern wie im Vakuum. Bildet man das Verhältnis des radialen Feldes $B_1^-(r_0, \theta)$ an der Kugeloberfläche zum radialen Feld $B_1^-(0, 0)$ im Zentrum, so ist das Resultat

$$\frac{B_1^-(r_0, \theta)}{B_1^-(0, 0)} = \frac{2\mu_0}{\mu} \frac{1}{1 + 4 \frac{\mu_0}{\mu}} \cos \theta \approx \frac{2\mu_0}{\mu} \cos \theta.$$

Das Auftreten des Faktors $2\mu_0/\mu = 10^{-3}-10^{-4}$ zeigt, dass das radiale Feld an der Oberfläche um mehrere Grössenordnungen schwächer ist als im Zentrum. Man begeht daher keinen grossen Fehler mit der Annahme, dass das radiale Feld an der Oberfläche ganz verschwindet. Diese Approximation entspricht einer unendlichen Permeabilität des Materials. Setzt man z.B. $\mu_0/\mu = 0$ in Gl. (37) des Berichts über die rotierende Kugel, so ist $B_1^-(r_0, \theta) = 0$, wie erwartet. Da das radiale Feld an der Oberfläche verschwindet, existiert dort nur ein tangenciales Feld, d.h. die Oberfläche fällt mit einer Feldlinie zusammen. Diese Schlussfolgerung gilt ganz allgemein für Körper mit beliebiger Form wenn $\mu_0/\mu = 0$ ist.

Übertragen auf die rotierende Scheibe bedeutet die Approximation einer unendlichen Permeabilität das Verschwinden von B_r am Zylindermantel und von B_z an der oberen und unteren Fläche des Zylinders. Das hat eine sehr beträchtliche Vereinfachung des Problems zur Folge, da die Übergangsbedingungen vom Zylinder zum Vakuum jetzt durch Randbedingungen ersetzt werden können. Der Fall endlicher Permeabilität scheint überhaupt nur numerisch lösbar zu sein.

Die Randbedingungen an der Oberfläche sind:

1) Mantelfläche bei $r=r_0$:

$$B_r(r_0, z) = - \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{r=r_0} = 0. \quad (11)$$

2) Oberfläche bei $z=h$:

$$B_z(r, h) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A(r, z) \right]_{z=h} = 0. \quad (12)$$

Bedingung (1), Gl. (11), führt zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n c_n J_1(c_n r_0) \sinh c_n z = 0 \quad (13)$$

und lässt sich erfüllen, wenn

$$c_n = \frac{j_{1n}}{r_0} \quad (14)$$

gewählt wird, wobei j_{1n} die (tabellierten) n 'ten Wurzeln von J_1 sind. Um die Schreibweise etwas zu vereinfachen, setzen wir

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} &= \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ \frac{z}{h} &= \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = \frac{h}{r_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Mit (14) und (15) wird das Vektorpotential

$$A(\rho, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(j_{1n} \rho) \cosh j_{1n} \gamma - \alpha r_0^3 \rho^3 + A \rho. \quad (16)$$

Im letzten Term wurde der Faktor r_0 im A absorbiert.

Gleichung (16) wird jetzt benutzt, um die zweite Randbedingung, Gl. (12), zu erfüllen. Differentiation nach γ ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n j_{1n} J_0(j_{1n} \rho) \cosh j_{1n} \gamma_0 - 4 \alpha r_0^3 \rho^2 + 2A = 0. \quad (17)$$

Um die Entwicklungskoeffizienten A_n aus dieser Gleichung zu bestimmen, ist es am günstigsten, ρ^2 nach Funktionen $J_0(j_{1n} \rho)$ zu entwickeln. Die $J_0(j_{1n} \rho)$ sind orthogonal im Intervall $0 \leq \rho \leq 1$, aber nicht vollständig, denn eine Konstante lässt sich nicht

durch sie darstellen. Wir müssen zur geplanten Reihenentwicklung noch eine Konstante hinzuaddieren, die separat bestimmt werden muss. Die Entwicklung von ρ^2 ist daher

$$\rho^2 = B + \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(j_{1n} \rho). \quad (18)$$

Nach Multiplikation mit $\rho J_0(j_{1n} \rho)$ und Integration von 0 bis 1 erhält man

$$\int_0^1 \rho^3 J_0(j_{1n} \rho) d\rho = B \int_0^1 \rho J_0(j_{1n} \rho) d\rho + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 \rho J_0(j_{1n} \rho) J_0(j_{1n} \rho) d\rho. \quad (19)$$

Die einzelnen Integrale sind

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^3 J_0(j_{1n} \rho) d\rho &= \frac{2}{j_{1n}^2} J_0(j_{1n}) \\ \int_0^1 \rho J_0(j_{1n} \rho) d\rho &= 0 \\ \int_0^1 \rho J_0(j_{1m} \rho) J_0(j_{1n} \rho) d\rho &= \frac{1}{2} J_0^2(j_{1n}) \text{ wenn } m=n \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (20)$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (19) ein, so findet man für B_n

$$B_n = \frac{4}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n})} \quad (21)$$

und für ρ^2

$$\rho^2 = B + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{1n} \rho)}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n})}. \quad (22)$$

Zur Bestimmung von B setzt man $\rho=1$,

$$1 = B + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{1n}^2}. \quad (23)$$

Die Summe über $1/j_{1n}^2$ lässt sich aus der Relation

$$\frac{d}{dz} \frac{J_y'(z)}{J_y(z)} = -\frac{y}{z^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2 + j_{yn}^2}{(z^2 - j_{yn}^2)^2} \quad (24)$$

ableiten. Führt man nämlich die Differentiation aus und geht zum limes $z \rightarrow 0$ über, so ergibt das

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n\lambda}^2} = \frac{1 - 2\nu(\nu-1)}{4(\nu+1)}, \quad (25)$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n\lambda}^2} = \frac{1}{8},$$

woraus

$$B = \frac{1}{2}$$

folgt, also

$$p^2 = \frac{1}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{n\lambda} p)}{j_{n\lambda}^2 J_0(j_{n\lambda})}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (26)$$

Dieses Resultat kann jetzt in Gl. (17) eingesetzt werden. Fasst man alle Terme, die mit $J_0(j_{1n} p)$ multipliziert werden, zusammen, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n j_{1n} \cosh j_{1n} \xi_0 - \frac{16 a \kappa_0^3}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n})} \right\} J_0(j_{1n} p) - 2 a \kappa_0^3 + 4 A = 0. \quad (27)$$

Die Koeffizienten von $J_0(j_{1n} p)$ müssen separat verschwinden, woraus folgende Konstanten resultieren:

$$A = a \kappa_0^3$$

$$A_n = \frac{16 a \kappa_0^3}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \xi_0}. \quad (28)$$

Damit wird das Vektorpotential, Gl. (16), unter Benutzung der Definition von a , Gl. (9),

$$A(p, \xi) = \mu \sqrt{\frac{p}{\mu_0}} \omega_0 \rho_{1n} \kappa_0^3 \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n} p) \cosh j_{1n} \xi}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \xi_0} - \frac{1}{8} p(p^2 - 1) \right\}. \quad (29)$$

Das Magnetfeld

Die beiden Komponenten des Magnetfeldes gehen durch

$$\begin{aligned} B_r(\rho, r) &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A(\rho, r)}{\partial r} \\ B_z(\rho, r) &= \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A(\rho, r) \end{aligned} \quad (30)$$

aus dem Vektorpotential hervor. Nach Ausführung der Differentiationen ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$B_r(\rho, r) = -2\mu \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \omega_0 \rho_{\text{m}} \kappa_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n} \rho) \sinh j_{1n} r}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} r_0} \quad \ell = \frac{r}{r_0} \quad (31)$$

$$B_z(\rho, r) = \mu \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \omega_0 \rho_{\text{m}} \kappa_0^2 \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{1n} \rho) \cosh j_{1n} r}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} r_0} - \frac{1}{2} \left(\rho^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \right\} \quad \begin{aligned} f &= \frac{B}{B_0} \\ f_0 &= \frac{B}{B_0} \end{aligned} \quad (32)$$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \rho^2$

Die Feldlinien

Da die Feldlinien überall parallel zu $\vec{B}$ sein müssen, erfüllt ein Linienelement $d\vec{s}$ die Gleichung

$$d\vec{s} \times \vec{B} = 0. \quad (33)$$

In unserem Falle ist

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= \hat{e}_r \kappa_0 d\rho + \hat{e}_z \kappa_0 dr \\ \vec{B} &= \hat{e}_r B_r + \hat{e}_z B_z = -\hat{e}_r \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial r} + \hat{e}_z \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A, \end{aligned} \quad (34)$$

($\hat{e}_r, \hat{e}_z$ = Einheitsvektoren). Das Vektorprodukt von Gl. (33) ist daher

$$d\vec{s} \times \vec{B} = -\hat{e}_\varphi \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A d\rho + \frac{\partial A}{\partial r} dr \right) = 0.$$

Multipliziert man durch mit ρ so ist

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho A(\rho, \tau) d\rho + \frac{\partial}{\partial \tau} \rho A(\rho, \tau) d\tau = d[\rho A(\rho, \tau)] = 0$$

oder

$$\rho A(\rho, \tau) = K \quad (\text{eine Konstante}) \quad (35)$$

die Gleichung der Feldlinien. Voll ausgeschrieben ist das

$$\rho \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n} \rho) \cosh j_{1n} \tau}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \tau_0} - \frac{1}{8} \rho (\rho^2 - 1) \right\} = K. \quad (36)$$

Die Lösung dieser hochgradig transzendenten Gleichung kann nur numerisch erfolgen. Nur für $K=0$ können die Feldlinien direkt aus Gl. (36) bestimmt werden. Bei $K=0$ ist eine Feldlinien offensichtlich $\rho=0$, d.h. die zentrale Achse füllt mit einer Feldlinie zusammen. Eine zweite Feldlinie ist $\tau=\tau_0$, d.h. die Oberfläche der Scheibe. Das kann man folgendermassen erkennen: Wenn $\tau=\tau_0$ ist, wird aus dem Ausdruck in geschweiften Klammern, Gl. (36),

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n} \rho)}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n})} - \frac{1}{8} (\rho^3 - \rho). \quad (37)$$

ρ^3 und ρ können nach $J_1(j_{1n} \rho)$ entwickelt werden, da diese ein vollständiges orthogonales Funktionensystem im Bereich $0 \leq \rho < 1$ bilden. Den Punkt $\rho=1$ brauchen wir im Moment nicht. Das Ergebnis der Entwicklung ist

$$\begin{aligned} \rho^3 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 - j_{1n}^2}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n})} J_1(j_{1n} \rho) \\ \rho &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n} \rho)}{j_{1n} J_0(j_{1n})} \end{aligned} \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (38)$$

also

$$\frac{1}{8} (\rho^3 - \rho) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n} \rho)}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n})}. \quad (39)$$

Der zweite Term in Gl. (37) hebt sich daher mit dem ersten weg, so dass $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$ tatsächlich eine Feldlinie ist. Die dritte Feldlinie bei $K=0$ ist $\rho=1$, wie leicht aus Gl. (36) zu erkennen ist, da ja per definitionem $J_1(j_{1n})=0$ ist. Der Verlauf des Feldes bei $\rho=1$ ist entgegengesetzt zu dem bei $\rho=0$, ähnlich wie im Fall der Kugel, so dass auch bei der Scheibe ein Kreis in der Ebene $z=0$ existieren muss, auf dem $\vec{B}$ verschwindet.

Die Feldlinie bei $K=0$ demonstriert das bereits erwähnte Resultat, dass die Oberfläche eines Körpers mit unendlicher Permeabilität immer mit einer Feldlinie zusammenfällt. Das ist ein zumindest notwendiger Beweis für die Richtigkeit der vorliegenden Berechnung.

Das axiale Magnetfeld $B_z(\rho, \mathfrak{z})$

Die axiale Komponente des Magnetfeldes, Gl. (32), ist bestimmt die interessantere der beiden Felder. Mit den gleichen Werten, die für die Kugel genommen wurden ($\mu/\mu_0=1000$, $B_H=2,79526 \times 10^{-26}$ m/kg, $\omega_0=2\pi \cdot 800$ rad/s, $\rho_m=5000$ kg/m³, $r_0=0,1$ m) ist

$$\mu \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega_0 \rho_m r_0^2 = 4,7110 \times 10^{-4} \text{ Gauss}.$$

Die axialen Felder bei $\rho=0$ und $\rho=1$ sind dann

$$B_z(0, \mathfrak{z}) = 4,7110 \times 10^{-4} \left\{ \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh j_{1n} \mathfrak{z}}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \mathfrak{z}_0} \right\} \text{ Gauss}$$

$$B_z(1, \mathfrak{z}) = -4,7110 \times 10^{-4} \left\{ \frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh j_{1n} \mathfrak{z}}{j_{1n}^2 \cosh j_{1n} \mathfrak{z}_0} \right\} \text{ Gauss.} \quad (40b)$$

$\rho = \frac{r}{r_0}$
 $\mathfrak{z} = \frac{z}{r_0} \quad \int_0^{\mathfrak{z}} \frac{z}{r_0^2} dz = \frac{z^2}{2r_0^2} = \frac{\mathfrak{z}^2}{2} \quad (40a)$

Der Verlauf der beiden Komponenten für $\mathfrak{z}_0=0,5$ ist in Fig. 2 dargestellt. In der gleichen Figur ist auch die Kurve des Magnetfeldes entlang der Rotationsachse der Kugel ($\theta=0$) eingezeichnet. Mit der Variablentransformation $\rho \rightarrow \mathfrak{z}$ ergibt sich für diese Kurve

Kugel: $B_1^-(0, \mathfrak{z}) = 0,9422 \times 10^{-4} (1 - \mathfrak{z}^2) \text{ Gauss} \quad (41)$

$$0 \leq \mathfrak{z} \leq 1 \quad (\mathfrak{z} = \frac{r}{r_0}).$$

Die Distanz $0 \leq \rho \leq 1$ wurde in der Figur auf die Hälfte reduziert um sie der nur halb so dicken Scheibe anzupassen.

Ein Vergleich von $B_z(1, \frac{1}{2})$ der Scheibe mit dem tangentialen Feld B_2^- der Kugel ist nur an deren Äquator, $(r_0, \frac{\pi}{2})$, möglich. Das Äquatorialfeld der Kugel, $-B_2^-(r_0, \frac{\pi}{2})$, ist $-0,9422 \times 10^{-4}$ Gauss, also gleich gross wie Gl. (41) bei $\frac{1}{2}=0$, während das entsprechende Feld der Scheibe im Punkt $(1,0)$, $B_z(1,0) = -0,9801 \times 10^{-4}$ Gauss ist (vergl. Fig. 2).

Die Differenz zwischen den Feldern im Zentrum der Kugel, $0,9422 \times 10^{-4}$ Gauss und der Scheibe, $0,7523 \times 10^{-4}$ Gauss, ist zum Teil darauf zurückzuführen, dass die Scheibe nur 0,1 m dick ist, im Gegensatz zur Kugel, deren Durchmesser 0,2 m ist. Wäre die Scheibe 0,14 m dick, wären die beiden Felder gleich. Je höher der Zylinder, umso stärker wird das zentrale Feld. Im Grenzfall $h \rightarrow \infty$ hat das Magnetfeld die Form

$$\begin{aligned} l = \infty: \quad B_z(\rho) &= \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{b}{\mu_0}} \rho_m \omega_0 r_0^2 \left(\frac{1}{2} - \rho^2\right) \\ &= 2,3555 \times 10^{-4} \left(\frac{1}{2} - \rho^2\right) \text{ Gauss.} \end{aligned} \quad (42)$$

Die Feldstärke auf der Achse beträgt jetzt $1,1777 \times 10^{-4}$ Gauss oder rund $1\frac{1}{2}$ mal so viel wie bei der Scheibe mit $h=0,05$ m. Man könnte diesen Effekt ausnutzen und evtl. nur einen langen Stab mit hohem μ/μ_0 rotieren lassen. Gleichung (42) bei $\rho=0$ lässt sich auch so schreiben:

$$\begin{aligned} B_z(0) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{b}{\mu_0}} \rho_m \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \omega_0 r_0^2 \\ &= 2,3431 \times 10^{-4} \frac{\mu}{\mu_0} \omega_0 r_0^2 \text{ Gauss.} \end{aligned} \quad (43)$$

Mit $\frac{\mu}{\mu_0} = 3 \times 10^4$, $\omega_0 = 2\pi \cdot 1000$ rad/s braucht r_0 nur 2,61 cm zu sein um ein Feld von 3×10^{-4} Gauss zu erreichen, das viermal so stark wäre wie das Feld der rotierenden Scheibe.

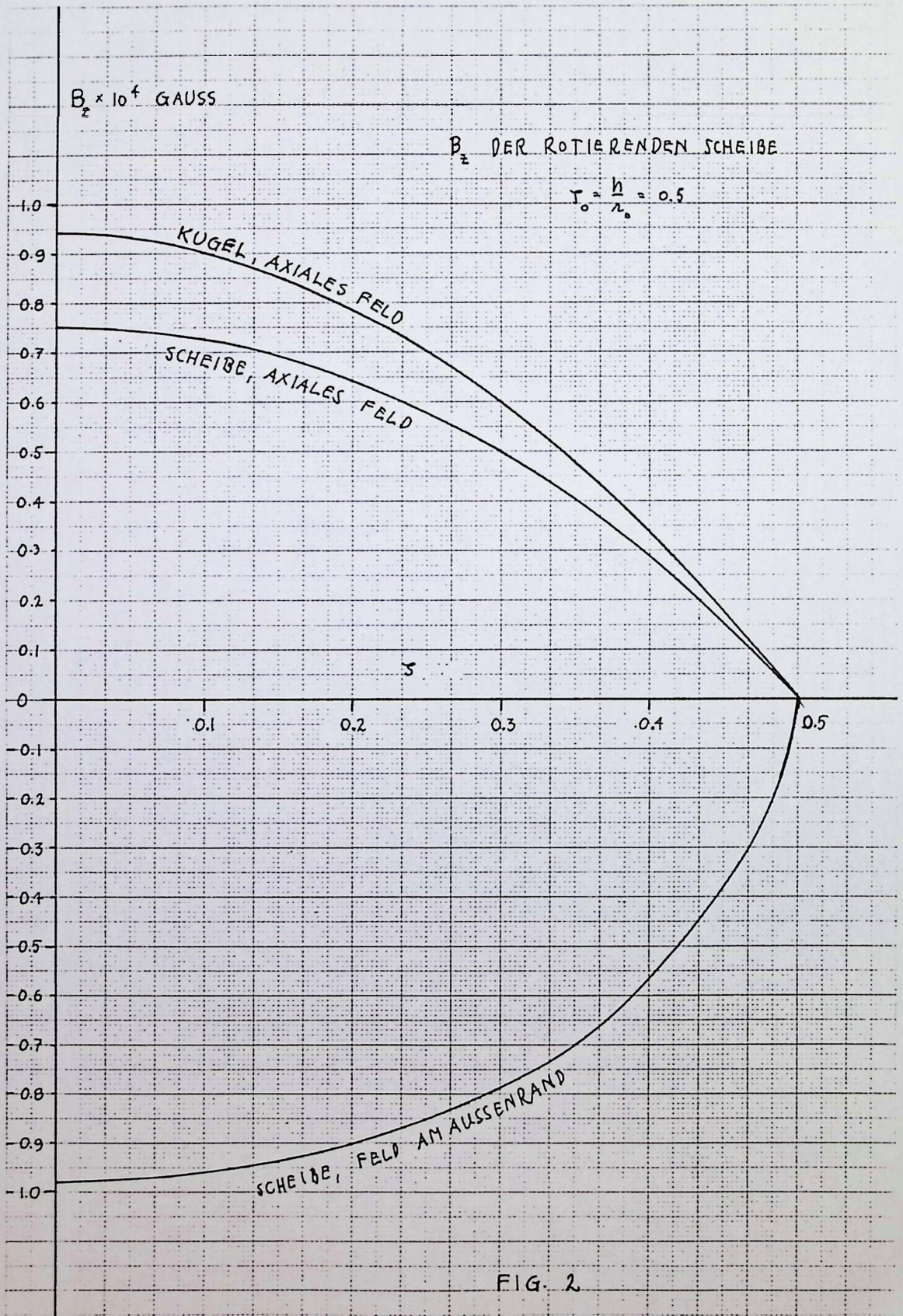


FIG. 2