

Die Ableitung der 4-dimensionalen einheitlichen Feldgleichungen von B. Heim

Zur Ableitung der Feldgleichungen wurde eine Reihe von Quellen benutzt, nämlich der Artikel von Herrn v. Ludwiger im MUFON Tagungsband von 1975⁽¹⁾, die technische Mitteilung AE 331-7/81⁽²⁾, verschiedene private Mitteilungen von Herrn von Ludwiger und schliesslich der erste Band von Heims Buch⁽³⁾.

Die Ableitung basiert auf einer Analogie der gravitativen Feldgleichungen zu den Maxwellgleichungen, von denen sie sich unter anderem durch eine leicht verschiedene Metrik unterscheiden. Es gibt eine Koordinatentransformation, die die Maxwellgleichungen invariant lässt und eine andere, die die Gravitationsgleichungen invariant lässt. Beide Gleichungssysteme lassen sich durch Tensordivergenzen darstellen und der Grundgedanke von Heim ist, eine lineare Kombination der Tensorkomponenten zu finden, die unter der kombinierten Koordinatentransformation im Minkowski-raum invariant bleibt.

Die Maxwellgleichungen

Um die Methode zu veranschaulichen, ist es am günstigsten mit den bekannten Maxwellgleichungen zu beginnen:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Im Vakuum sind

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2.2)$$

Zum Zweck der Darstellung der Gleichungen durch eine Tensordivergenz schreibt Heim die Gleichungen in einer etwas symmetrischeren:

Form,

$$\nabla \cdot \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} = c \sqrt{\mu_0} \rho_e \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\mu_0} \vec{H} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \sqrt{\mu_0} \vec{H} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \sqrt{\mu_0} \vec{H} = \sqrt{\mu_0} \vec{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} \quad (3.4)$$

ρ_e = Ladungsdichte, $\vec{j}_e$ = Stromdichte, $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$.

Ausserdem muss die Kontinuitätsgleichung erfüllt werden,

$$\nabla \cdot \vec{j}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

und schliesslich kommt noch die Lorentzkraftdichte hinzu,

$$\vec{f}_e = \rho_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.6)$$

oder, im Vakuum

$$\vec{f}_e = \rho_e (\vec{E} + \vec{v} \times \mu_0 \vec{H}). \quad (3.6)$$

Der Index e in diesen Gleichungen weist auf die elektromagnetische Natur der Grössen hin.

Die Maxwell'schen Gleichungen (3.1)-(3.4) lassen sich bekanntlich als Divergenz von antisymmetrischen Tensoren darstellen.

Der elektromagnetische Tensor $T^{\mu\nu}_e$ und die dazugehörige Quelle s^μ_e sind

$$T^{\mu\nu}_e = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\mu_0} H_z & -\sqrt{\mu_0} H_y & -i\sqrt{\epsilon_0} E_x \\ -\sqrt{\mu_0} H_z & 0 & \sqrt{\mu_0} H_x & -i\sqrt{\epsilon_0} E_y \\ \sqrt{\mu_0} H_y & -\sqrt{\mu_0} H_x & 0 & -i\sqrt{\epsilon_0} E_z \\ i\sqrt{\epsilon_0} E_x & i\sqrt{\epsilon_0} E_y & i\sqrt{\epsilon_0} E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Eichinvariante
 $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x^\mu}$
 $\alpha(x)$ willkürlich
 (4.1)

Wiso hermitisch?

Kontinuitätsgleichung = gerade, da E ungerade und j gerade

$$s^\mu_e = (\sqrt{\mu_0} j_{ex}, \sqrt{\mu_0} j_{ey}, \sqrt{\mu_0} j_{ez}, ic\sqrt{\mu_0} \rho_e).$$

(4.2)

Der zu $T_e^{\mu\nu}$ duale Tensor, $*T_e^{\mu\nu}$, und die dazugehörige Quelle q_e^μ sind

$$F \rightarrow B \quad B \rightarrow -F$$

$$*T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{\epsilon_0} E_z & i\sqrt{\epsilon_0} E_y & \sqrt{\mu_0} H_x \\ i\sqrt{\epsilon_0} E_z & 0 & -i\sqrt{\epsilon_0} E_x & \sqrt{\mu_0} H_y \\ -i\sqrt{\epsilon_0} E_y & i\sqrt{\epsilon_0} E_x & 0 & \sqrt{\mu_0} H_z \\ -\sqrt{\mu_0} H_x & -\sqrt{\mu_0} H_y & -\sqrt{\mu_0} H_z & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$q_e^\mu = (0, 0, 0, 0) \quad (5.2)$$

Die 6 Gleichungen (3.1)-(3.6) ergeben sich durch folgende Operationen aus den Tensoren (4.1) und (5.1) sowie ihren Quellen (4.2) und (5.2):

$$\frac{\partial}{\partial x_e^\nu} T_e^{\mu\nu} = s_e^\mu \quad \text{ergibt Gl. (3.1) und (3.4)} \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_e^\nu} *T_e^{\mu\nu} = q_e^\mu \quad \text{ergibt Gl. (3.2) und (3.3)} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial s_e^\mu}{\partial x_e^\mu} = 0 \quad \text{ergibt Gl. (3.5)} \quad (6.3)$$

$$f_e^j = T^{j\nu} s^\nu \quad \text{ergibt Gl. (3.6)} \quad (6.4)$$

In diesen Gleichungen durchlaufen griechische Indizes die Werte $\mu=1,2,3,4$ und lateinische die Werte $j=1,2,3$. Die Summenkonvention wurde benutzt, d.h. über zwei gleiche Indizes wird immer summiert, ausser wenn die Konvention ausdrücklich ausser Kraft gesetzt wird. Die Definition der verschiedenen in Gl. (6) auftretenden Grössen ist

$$\boxed{x_e^i = x, \quad x_e^2 = y, \quad x_e^3 = z, \quad x_e^4 = ict} \quad (7.1)$$

mit der in Gl. (9) hinzukommenden Grösse

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.2)$$

Die Maxwell'schen Gleichungen gelten im Minkowskiraum, den Heim mit R_4 bezeichnet⁽⁴⁾, und dessen Koordinaten durch Gl. (7.1) gekennzeichnet sind. Die charakteristische Eigenschaft der Gleichungen ist ihre Invarianz gegenüber einer Lorentztransformation. Die transformierten Koordinaten $\bar{x}_e^\mu$ sind Linearkombinationen der ursprünglichen Koordinaten x_e^μ ,

$$\bar{x}_e^\mu = A_{e\mu\nu} x_e^\nu \quad (8.1)$$

und umgekehrt

$$x_e^\mu = A_{e\mu\nu}^{-1} \bar{x}_e^\nu. \quad (8.2)$$

Die $A_{e\mu\nu}$ und $A_{e\mu\nu}^{-1}$ sind Elemente von 4×4 Matrizen. Bei Translationen in der x -Richtung gilt

$$A_e = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 & 0 & i\frac{v}{c}\gamma_- \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{v}{c}\gamma_- & 0 & 0 & \gamma_- \end{pmatrix}, \quad A_e^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 & 0 & -i\frac{v}{c}\gamma_- \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\frac{v}{c}\gamma_- & 0 & 0 & \gamma_- \end{pmatrix} \quad (9)$$

mit $A_e^{-1} A_e = A_e A_e^{-1} = 1$ (Einheitsmatrix), oder

$$A_{e\mu\lambda} A_{e\lambda\nu}^{-1} = A_{e\mu\lambda}^{-1} A_{e\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (10)$$

A_e ist die Transformationsmatrix, die Heim mit $\hat{A}_-$ bezeichnet⁽⁵⁾.

Um zu zeigen, dass die Gleichungen unter einer Lorentztransformation, Gl. (8.1) und (8.2), invariant bleiben, benutzt man zuerst Gl. (6.1). Die transformierte Gleichung ist

$$\frac{\partial \bar{T}_e^{\mu\nu}}{\partial \bar{x}_e^\nu} = \bar{J}_e^\mu. \quad (11)$$

Ein Tensor ist durch seine Transformationseigenschaften ^{bei Drehungen} definiert. Definitionsgemäss lässt sich $\bar{T}_e^{\mu\nu}$ daher folgendermassen durch die nichttransformierten Tensorkomponenten darstellen:

$$\bar{T}_e^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}_e^\mu}{\partial x_e^\alpha} \frac{\partial \bar{x}_e^\nu}{\partial x_e^\beta} T_e^{\alpha\beta}. \quad (12)$$

Die Ableitungen der transformierten Koordinaten nach den ursprünglichen Koordinaten können aufgrund von Gl. (8.1) berechnet werden,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}_e^\mu}{\partial x_e^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x_e^\alpha} A_{e\mu\nu} x_e^\nu = A_{e\mu\alpha} \\ \frac{\partial \bar{x}_e^\nu}{\partial x_e^\beta} &= \frac{\partial}{\partial x_e^\beta} A_{e\nu\lambda} x_e^\lambda = A_{e\nu\beta}.\end{aligned}\quad (13)$$

Eingesetzt in Gl. (12) ergibt das

$$\bar{T}_e^{\mu\nu} = A_{e\mu\alpha} A_{e\nu\beta} T_e^{\alpha\beta}.\quad (14)$$

Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu}$ ist

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_e^\nu} = \frac{\partial}{\partial x_e^\lambda} \frac{\partial x_e^\lambda}{\partial \bar{x}_e^\nu}.\quad (15)$$

$\partial x_e^\lambda / \partial \bar{x}_e^\nu$ lässt sich aus Gl. (8.2) bestimmen,

$$\frac{\partial x_e^\lambda}{\partial \bar{x}_e^\nu} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_e^\nu} A_{e\lambda\kappa}^{-1} \bar{x}_e^\kappa = A_{e\lambda\nu}^{-1}$$

und daher ist

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_e^\nu} = A_{e\lambda\nu}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_e^\lambda}.\quad (16)$$

Mit Gl. (14) und (16) ergibt sich für die Ableitung von $\bar{T}_e^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}_e^{\mu\nu}}{\partial \bar{x}_e^\nu} &= A_{e\lambda\nu}^{-1} A_{e\mu\alpha} A_{e\nu\beta} \frac{\partial T_e^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\lambda} \\ &= \delta_{\lambda\beta} A_{e\mu\alpha} \frac{\partial T_e^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\lambda} \quad (\text{wegen Gl. (10)}) \\ &= A_{e\mu\alpha} \frac{\partial T_e^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\beta}.\end{aligned}\quad (17)$$

Der transformierte Vektor $\bar{s}_e^\mu$ ist, definitionsgemäss,

$$\bar{s}_e^\mu = \frac{\partial \bar{x}_e^\mu}{\partial x_e^\alpha} s^\alpha = A_{e\mu\alpha} s_e^\alpha.\quad (18)$$

Nach Einsetzen von Gl. (17) und (18) in Gl. (11) erhält man schliesslich

$$A_{e\mu\alpha} \frac{\partial T_e^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\beta} = A_{e\mu\alpha} S_e^\alpha$$

oder

$$\frac{\partial T_e^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\beta} = S_e^\alpha$$

und das ist wieder Gl. (6.1). Damit ist die Invarianz von Gl. (6.1) unter einer Lorentztransformation bewiesen. Ein entsprechendes Vorgehen zeigt die Invarianz auch der Gleichungen (6.2) und (6.3).

Die gravitativen Gleichungen

Die Gravitationsgleichungen entsprechen in ihrem Aufbau ganz den Maxwellgleichungen. Dem elektrischen Verschiebungsvektor $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ entspricht nach Heim der gravitative Vektor $\alpha \vec{T}$, wobei $\vec{T}$ das normale Gravitationsfeld darstellt. Das Analogon der magnetischen Induktion $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ist der Vektor $\beta \vec{\mu}$ mit dem Mesofeld $\vec{\mu}$, das sich demnach zu $\vec{T}$ so verhält wie $\vec{H}$ zu $\vec{E}$. Nach Heim gelten die gravitativen Gleichungen im $R_{+4}^{(6)}$, der sich vom R_{-4} dadurch unterscheidet, dass $x_g^4 = \omega t$ und nicht ict ist, mit

$$\omega = \frac{4}{3} C, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha \beta}} = \omega.$$

Das bewirkt eine Vorzeichenänderung auf der rechten Seite der zu Gl. (1.2) äquivalenten Gravitationsgleichung. Schliesslich unterscheidet sich $\beta \vec{\mu}$ von $\vec{B}$ noch dadurch, dass seine Quelle die Feldmasse $\rho_m - \rho_{m0}$ ist, während $\vec{B}$ keine Quellen besitzt, weil es keine magnetischen Monopole gibt.

Mit diesen Entsprechungen und Änderungen ergeben sich folgende Beziehungen für die Gravitationsgleichungen von Heim,

$$\nabla \cdot \alpha \vec{T} = \rho_m \quad \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (19.1)$$

$$\nabla \times \vec{T} = \frac{\partial}{\partial t} \beta \vec{\mu} \quad \beta = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \text{ für } \frac{4}{3} C \quad (19.2)$$

$$\nabla \cdot \beta \vec{\mu} = \beta \omega (\rho_m - \rho_{m0}) \quad \beta = \frac{4\pi\mu}{c^2} \text{ für } \omega = C \quad (19.3)$$

$$\nabla \times \vec{\mu} = \vec{j}_m + \frac{\partial}{\partial t} \alpha \vec{T} \quad (19.4)$$

kein Vektorpotential möglich, weil $\nabla \cdot \vec{\mu} \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T_g^{\mu\nu} = S^\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} T_g^{11} + \frac{\partial}{\partial x^2} T_g^{12} + \frac{\partial}{\partial x^3} T_g^{13} + \frac{\partial}{\partial x^4} T_g^{14} = S^1$$

$$\frac{\partial}{\partial x^1} 0 + \frac{\partial}{\partial x^2} \sqrt{\beta} \mu_z + \frac{\partial}{\partial x^3} \sqrt{\beta} \mu_y + \sqrt{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^4} \Gamma_x = \sqrt{\beta} j_{m1}$$

führt zu 20.4

$$\frac{\partial}{\partial x^1} T_g^{41} + \frac{\partial}{\partial x^2} T_g^{42} \quad \text{usw. führt auf 20.1}$$

● Jacobi Identität

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F^{\beta\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} F^{\mu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} F^{\alpha\beta} = 0$$

$$1 \quad \frac{\partial}{\partial x_1} F^{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} F^{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} F^{12} = q^4 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{\beta} \mu_z + \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{\beta} \mu_y + \frac{\partial}{\partial x_3} \sqrt{\beta} \mu_x = q^4$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F^{32} + \frac{\partial}{\partial x_2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x_3} F^{13} = q^4 \Rightarrow - \left(\quad \quad \quad \right) = q^4$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F^{44} + \frac{\partial}{\partial x_2} F^{41} + \frac{\partial}{\partial x_4} F^{12} = q^3 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{\alpha} \Gamma_y + \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{\alpha} \Gamma_x + \frac{\partial}{\partial x_4} \sqrt{\beta} \mu_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F^{34} + \frac{\partial}{\partial x_3} F^{41} + \frac{\partial}{\partial x_4} F^{13} = q^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt{\alpha} \Gamma_z + \frac{\partial}{\partial x_3} \sqrt{\alpha} \Gamma_y + \frac{\partial}{\partial x_4} \sqrt{\beta} \mu_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} F^{34} + \frac{\partial}{\partial x_3} F^{42} + \frac{\partial}{\partial x_4} F^{23} = q^1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} \sqrt{\alpha} \Gamma_z + \frac{\partial}{\partial x_3} \sqrt{\alpha} \Gamma_x + \frac{\partial}{\partial x_4} \sqrt{\beta} \mu_y = 0$$

Die Gleichungen (19.1), (19.2) und (19.4) stimmen mit den entsprechenden Gleichungen auf S. 184 und 185 von Ref. (1) überein, während Gl. (19.3) S. 49 von Ref. (3) entnommen ist.

In der symmetrischen Schreibweise von Heim entsteht aus diesen Gleichungen das System

$$\nabla \cdot \sqrt{\alpha} \vec{T} = \omega \sqrt{\beta} \rho_m \quad \text{Unterschied zu Maxwellgl.} \quad (20.1)$$

$$\nabla \times \sqrt{\alpha} \vec{T} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\beta} \vec{\mu} \quad (20.2)$$

$$\nabla \cdot \sqrt{\beta} \vec{\mu} = \sqrt{\beta} \omega (\rho_m - \rho_{m0}) \quad (20.3)$$

$$\nabla \times \sqrt{\beta} \vec{\mu} = \sqrt{\beta} \vec{j}_m + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\alpha} \vec{T} \quad (20.4)$$

ρ_m, ρ_{m0} = Gesamt- und ponderable Massendichte, $\vec{j}_m$ = Massenstromdichte.

Die Kraftdichte soll hier nicht vorgegeben sondern aus einer Relation ähnlich derjenigen von Gl. (6.4) abgeleitet werden. Die Kontinuitätsgleichung ist wieder

$$\nabla \cdot \vec{j}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \quad (20.5)$$

Die Tensoren, aus denen die Gleichungen (20.1)-(20.5) durch Divergenzbildung abgeleitet werden können, sind ? wie?

$$T_g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\beta} \mu_z & -\sqrt{\beta} \mu_y & -\sqrt{\alpha} \Gamma_x \\ -\sqrt{\beta} \mu_z & 0 & \sqrt{\beta} \mu_x & -\sqrt{\alpha} \Gamma_y \\ \sqrt{\beta} \mu_y & -\sqrt{\beta} \mu_x & 0 & -\sqrt{\alpha} \Gamma_z \\ \sqrt{\alpha} \Gamma_x & \sqrt{\alpha} \Gamma_y & \sqrt{\alpha} \Gamma_z & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{invariant gegen} \\ \text{Eichtransf.} \\ \text{da } \vec{\nabla} \cdot \vec{\mu} = 0 \end{matrix} \quad (21.1)$$

$$S_g^\mu = (\sqrt{\beta} j_{mx}, \sqrt{\beta} j_{my}, \sqrt{\beta} j_{mz}, \omega \sqrt{\beta} \rho_m) \quad (21.2)$$

und der duale Tensor (der Index g steht für "gravitativ")

zu unterscheiden vom Maxwell'schen Spannungstensor

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} F^{\beta\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} F^{\alpha\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma} F^{\gamma\alpha} = g^{\alpha\mu} \text{ für } (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \mu)$$

$$\Gamma \rightarrow \gamma \quad \text{und} \quad \mu \rightarrow -\Gamma$$

Metrik anders

$$*_g T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\alpha} \Gamma_z & \sqrt{\alpha} \Gamma_y & \sqrt{\beta} \mu_x \\ \sqrt{\alpha} \Gamma_z & 0 & -\sqrt{\alpha} \Gamma_x & \sqrt{\beta} \mu_y \\ -\sqrt{\alpha} \Gamma_y & \sqrt{\alpha} \Gamma_x & 0 & \sqrt{\beta} \mu_z \\ -\sqrt{\beta} \mu_x & -\sqrt{\beta} \mu_y & -\sqrt{\beta} \mu_z & 0 \end{pmatrix} \quad (22.1)$$

$$q_g^\mu = (0, 0, 0, -\omega \sqrt{\beta} (\rho_m - \rho_{m0})). \quad (22.2)$$

Folgende Relationen führen zu den Gleichungen (20.1)-(20.5):

$$\frac{\partial}{\partial x_g^\nu} T_g^{\mu\nu} = S_g^\mu \quad \text{ergibt Gl. (20.1) und (20.4)} \quad (23.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_g^\nu} *_g T^{\mu\nu} = q_g^\mu \quad \text{ergibt Gl. (20.2) und (20.4)} \quad (23.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_g^\mu} S_g^\mu = 0 \quad \text{ergibt Gl. (20.5)} \quad (23.3)$$

In Analogie zu Gl. (6.4) bildet man die Beziehung

$$t_g^j = T_g^{j\nu} S_g^\nu \quad (23.4)$$

und erhält für die gravitative Kraftdichte den Ausdruck

$$\vec{t}_g = \rho_m (-\vec{\Gamma} + \vec{v} \times \beta \vec{\mu}). \quad (24)$$

In diesen Gleichungen ist

$$x_g^1 = x, \quad x_g^2 = y, \quad x_g^3 = z, \quad x_g^4 = \omega t$$

$$\gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{c^2}}}$$

Die Transformationsrelationen sind wieder

$$\bar{x}_g^\mu = A_{g\mu\nu} x_g^\nu \quad (26.1)$$

$$x_g^\mu = A_{g\mu\nu}^{-1} \bar{x}_g^\nu, \quad (26.2)$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m \frac{dU^\alpha}{d\tau} = \sum F^{\alpha\beta} U_\beta$$

$$p^\alpha = (\vec{p}, E/c)$$

$$U^\alpha = (\gamma \vec{v}, \gamma c)$$

$$\vec{U} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$p_0^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = (mc)^2$$

mit den Transformationsmatrizen für Translationen in der x-Richtung,

$$A_g = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 & 0 & \frac{v}{\omega} \gamma_+ \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{\omega} \gamma_+ & 0 & 0 & \gamma_+ \end{pmatrix}, \quad A_g^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_+ & 0 & 0 & -\frac{v}{\omega} \gamma_+ \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{\omega} \gamma_+ & 0 & 0 & \gamma_+ \end{pmatrix} \quad (27)$$

und

$$A_{g\mu\lambda} A_{g\lambda\nu}^{-1} = A_{g\mu\lambda}^{-1} A_{g\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (28)$$

A_g ist die Matrix, die von Heim mit $\hat{A}_+$ bezeichnet wird⁽⁷⁾.

Das gleiche Vorgehen wie im Falle der Maxwellgleichungen zeigt die Invarianz der Gleichungen (23.1)-(23.3) gegenüber einer Transformation zu einem gleichmässig bewegten Koordinatensystem.

Der kombinierte Tensor $T^{\mu\nu}$

Laut Heim liefert weder R_{-4} noch R_{+4} ein getreues Abbild der Wirklichkeit. Vielmehr müssen R_{-4} und R_{+4} zu einem gemeinsamen Raum R_4 kombiniert werden, in dem (a) $x^4 = \text{ict}$ ist⁽⁸⁾ und (b) die Feldgleichungen gegenüber der gemeinsamen Transformation $B = A_e A_g$ invariant sind⁽⁸⁾. Ein Blick auf den Tensor, Gl. (139) in Ref. (2), zeigt, dass der einheitliche Feldtensor aus einer linearen Kombination von $T_e^{\mu\nu}$ und $T_g^{\mu\nu}$ gebildet werden kann. Da $x^4 = \text{ict}$ ist, befindet man sich im Minkowskiraum der Maxwellgleichungen, so dass es nicht nötig ist deren Tensor, $T_e^{\mu\nu}$, abzuändern. $T_g^{\mu\nu}$ muss dagegen mit Konstanten multipliziert werden, die die richtigen Transformationseigenschaften bewirken. Diese Überlegungen führen zu folgenden Ansätzen für $T^{\mu\nu}$ und s^μ :

$$T^{\mu\nu} = T_e^{\mu\nu} + b_{(\mu\nu)} T_g^{\mu\nu} \quad (29.1)$$

$$s^\mu = s_e^\mu + b_{(\mu)} s_g^\mu \quad (29.2)$$

$$x^\mu = x_e^\mu. \quad (29.3)$$

Die Klammern um $\mu\nu$ und μ bedeuten, dass die Summierungskonvention aufgehoben ist, d.h. $b_{(\mu\nu)} T_g^{\mu\nu}$ ist ein gewöhnliches Produkt von $T_g^{\mu\nu}$ mit einer Konstanten $b_{\mu\nu}$ und $p_{(\mu)} s_g^\mu$ ist ein Produkt von s_g^μ mit der Konstanten p_μ .

Die neuen Gleichungen sollen wieder die Form haben

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x_e^\nu} = s^\mu \quad (30.1)$$

$$\frac{\partial^* T^{\mu\nu}}{\partial x_e^\nu} = q_g^\mu \quad (30.2)$$

$$\frac{\partial s^\mu}{\partial x_e^\nu} = 0 \quad (30.3)$$

Die Transformationsmatrizen $B = A_e A_g$ und $B^{-1} = A_g^{-1} A_e^{-1}$ sind

$$B_{\mu\nu} = A_{e\mu\lambda} A_{g\lambda\nu} \quad (31.1)$$

$$B_{\mu\nu}^{-1} = A_{g\mu\alpha}^{-1} A_{e\alpha\nu}^{-1} \quad (31.2)$$

so dass

$$\bar{x}_e^\mu = B_{\mu\nu} x_e^\nu = A_{e\mu\lambda} A_{g\lambda\nu} x_e^\nu \quad (32.1)$$

$$x_e^\mu = B_{\mu\nu}^{-1} x_e^\nu = A_{g\mu\alpha}^{-1} A_{e\alpha\nu}^{-1} \bar{x}_e^\nu \quad (32.2)$$

Mit Gl. (11) und (32.1) findet man für den transformierten Tensor $\bar{T}^{\mu\nu}$ den Ausdruck

$$\bar{T}^{\mu\nu} = A_{e\mu\lambda} A_{g\lambda\alpha} A_{e\gamma\kappa} A_{g\kappa\beta} T^{\alpha\beta} \quad (33)$$

Für die transformierte Ableitung von $T^{\mu\nu}$ ergibt sich dann, bei zweimaliger Anwendung von Gl. (28),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}^{\mu\nu}}{\partial \bar{x}_e^\nu} &= A_{g\gamma\delta}^{-1} A_{e\delta\alpha}^{-1} A_{e\mu\lambda} A_{g\lambda\alpha} A_{e\gamma\kappa} A_{g\kappa\beta} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\nu} \\ &= A_{e\mu\lambda} A_{g\lambda\alpha} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\beta} = B_{\mu\alpha} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\beta} \end{aligned} \quad (34)$$

Schliesslich findet man analog zum Fall der Maxwellgleichungen

$$\bar{S}^\mu = A_{e\mu\lambda} A_{g\lambda\alpha} S^\alpha = B_{\mu\alpha} S^\alpha. \quad (35)$$

Damit ergibt sich für die transformierte Gleichung

$$\frac{\partial \bar{T}^{\mu\nu}}{\partial \bar{x}_e^\nu} = \bar{S}^\mu$$

der Ausdruck

$$B_{\mu\alpha} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\beta} = B_{\mu\alpha} S^\alpha$$

oder, da $B_{\mu\alpha}$ ja eine beliebige Transformation darstellt,

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x_e^\beta} = S^\alpha. \quad (36)$$

Feldgleichung (30.1) ist somit invariant gegenüber der kombinierten Transformation B.

Als nächstes muss der Ansatz von Gl. (29.1) und (29.2) in Gl. (30.1) eingesetzt werden,

$$\frac{\partial}{\partial x_e^\nu} (T_e^{\mu\nu} + b_{(\mu\nu)} T_g^{\mu\nu}) = S_e^\mu + p_{(\mu)} S_g^\mu. \quad (37)$$

Da $T_e^{\mu\nu}$ Gl. (6.1) erfüllt, heben sich die beiden ersten Terme links und rechts weg und es bleibt

$$b_{(\mu\nu)} \frac{\partial T_g^{\mu\nu}}{\partial x_e^\nu} = p_{(\mu)} S_g^\mu. \quad (38)$$

Die Koordinaten x_e^j ($j=1,2,3$) stimmen mit x_g^j überein, so dass nur die Terme mit $\mu=4$ und $\nu=4$ justiert werden müssen. Dementsprechend wäre also

$$b_{ij} = p_j = 1 \quad (39)$$

zu setzen. Die 4 Gleichungen, die sich dann aus Gl. (38) für $\mu=1,2,3$ und 4 ergeben, sind, voll ausgeschrieben und unter Benutzung von Gl. (21.1) und (21.2),

$$\mu=1: \quad \sqrt{\beta} \left(\frac{\partial \mu_z}{\partial y} - \frac{\partial \mu_y}{\partial z} \right) - b_{14} \frac{\sqrt{\alpha}}{ic} \frac{\partial \Gamma_x}{\partial t} = \sqrt{\beta} j_{mx} \quad (40.1)$$

$$\mu=2: \quad \sqrt{\beta} \left(\frac{\partial \mu_x}{\partial z} - \frac{\partial \mu_z}{\partial x} \right) - b_{24} \frac{\sqrt{\alpha}}{ic} \frac{\partial \Gamma_y}{\partial t} = \sqrt{\beta} j_{my} \quad (40.2)$$

$$\mu=3: \quad \sqrt{\beta} \left(\frac{\partial \mu_y}{\partial x} - \frac{\partial \mu_x}{\partial y} \right) - b_{34} \frac{\sqrt{\alpha}}{ic} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial t} = \sqrt{\beta} j_{mz} \quad (40.3)$$

$$\mu=4: \quad \sqrt{\alpha} \left(b_{41} \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + b_{42} \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} + b_{43} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial z} \right) = p_4 \omega \sqrt{\beta} p_m \quad (40.4)$$

Ein Vergleich dieser Gleichungen mit Gl. (20.4) zeigt, dass

$$b_{14} = b_{24} = b_{34} = \frac{ic}{\omega} \quad (41.1)$$

sein muss. Aus Symmetriegründen, d.h. weil $T^{\mu\nu}$ ein antisymmetrischer Tensor sein muss, sind demnach auch

$$b_{41} = b_{42} = b_{43} = \frac{ic}{\omega} \quad (41.2)$$

Mit diesen Werten von $b_{\mu\nu}$ wird Gl. (40.4)

$$\frac{ic}{\omega} \nabla \cdot \sqrt{\alpha} \vec{T} = p_4 \omega \sqrt{\beta} p_m$$

und ein Vergleich mit Gl. (20.1) ergibt

$$p_4 = \frac{ic}{\omega} \quad (41.3)$$

Diese Resultate können jetzt in Gl. (29.1) und (29.2) eingesetzt werden, worauf man den einheitlichen Feldtensor und seine Quellen erhält. Sie lassen sich durch die Komponenten folgender Grössen ausdrücken:

$$\vec{C} = \sqrt{\mu_0} \vec{H} + \sqrt{\beta} \vec{\mu} \quad (42.1)$$

$$\vec{G} = \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} \vec{T} \quad (42.2)$$

$$\vec{j} = \sqrt{\mu_0} \vec{j}_e + \sqrt{\beta} \vec{j}_m \quad (42.3)$$

$$p = \sqrt{\mu_0} p_e + \sqrt{\beta} p_m \quad (42.4)$$

Voll ausgeschrieben sind der Feldtensor und seine Quelle

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & (\sqrt{\mu_0} H_z + \sqrt{\beta} \mu_z) & -(\sqrt{\mu_0} H_y + \sqrt{\beta} \mu_y) & -i(\sqrt{\epsilon_0} E_x + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_x) \\ -(\sqrt{\mu_0} H_z + \sqrt{\beta} \mu_z) & 0 & (\sqrt{\mu_0} H_x + \sqrt{\beta} \mu_x) & -i(\sqrt{\epsilon_0} E_y + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_y) \\ (\sqrt{\mu_0} H_y + \sqrt{\beta} \mu_y) & -(\sqrt{\mu_0} H_x + \sqrt{\beta} \mu_x) & 0 & -i(\sqrt{\epsilon_0} E_z + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_z) \\ i(\sqrt{\epsilon_0} E_x + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_x) & i(\sqrt{\epsilon_0} E_y + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_y) & i(\sqrt{\epsilon_0} E_z + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_z) & 0 \end{bmatrix} \quad (43.1)$$

$$S^\mu = [(\sqrt{\mu_0} j_{ex} + \sqrt{\beta} j_{mx}), (\sqrt{\mu_0} j_{ey} + \sqrt{\beta} j_{my}), (\sqrt{\mu_0} j_{ez} + \sqrt{\beta} j_{mz}), \underbrace{i c}_{\text{siehe 29.2+41.3}} (\sqrt{\mu_0} \rho_e + \sqrt{\beta} \rho_m)] \quad (43.2)$$

Der duale Tensor und seine Quelle sind

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -i(\sqrt{\epsilon_0} E_z + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_z) & i(\sqrt{\epsilon_0} E_y + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_y) & (\sqrt{\mu_0} H_x + \sqrt{\beta} \mu_x) \\ i(\sqrt{\epsilon_0} E_z + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_z) & 0 & -i(\sqrt{\epsilon_0} E_x + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_x) & (\sqrt{\mu_0} H_y + \sqrt{\beta} \mu_y) \\ -i(\sqrt{\epsilon_0} E_y + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_y) & i(\sqrt{\epsilon_0} E_x + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} T_x) & 0 & (\sqrt{\mu_0} H_z + \sqrt{\beta} \mu_z) \\ -(\sqrt{\mu_0} H_x + \sqrt{\beta} \mu_x) & -(\sqrt{\mu_0} H_y + \sqrt{\beta} \mu_y) & -(\sqrt{\mu_0} H_z + \sqrt{\beta} \mu_z) & 0 \end{bmatrix} \quad (44.1)$$

$$J^\mu = (0, 0, 0, -\omega \sqrt{\beta} (\rho_m - \rho_{m0})) \quad (44.2)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (30.1) und (30.2) lassen sich daraus die einheitlichen Feldgleichungen entweder in der Notation von Heim, Gl. (42), angeben,

$$\nabla \cdot \vec{G} = c \rho \quad \text{konst.} \quad (45.1)$$

$$\nabla \times \vec{G} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \quad (45.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{C} = \omega \sqrt{\beta} (\rho_m - \rho_{m0}) \quad (45.3)$$

$$\nabla \times \vec{C} = \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \quad (45.4)$$

oder in der voll ausgeschrieben Form,

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho_e \quad \begin{array}{c} T \perp H \\ H \perp E \\ \mu \perp T \end{array} \quad \begin{array}{c} E \parallel T \\ H \parallel \vec{u} \\ \mu \perp \vec{u} \end{array} \quad (46.1)$$

$$\nabla \cdot \alpha \vec{T} = \rho_m \quad (46.2)$$

$$\nabla \times (\sqrt{\epsilon_0} \vec{E} + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} \vec{T}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\mu_0} \vec{H} + \sqrt{\beta} \vec{\mu}) \quad (46.3)$$

$$\nabla \cdot \sqrt{\mu_0} \vec{H} = 0 \quad (46.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mu} = \omega (\rho_m - \rho_{m0}) = \omega \alpha \nabla \cdot (\vec{T} - \vec{T}_0) \quad (46.5)$$

$\vec{\mu} = \omega \alpha (\vec{T} - \vec{T}_0) + \vec{\phi} + \text{rot } \vec{E}$

$$\nabla \times (\sqrt{\mu_0} \vec{H} + \sqrt{\beta} \vec{\mu}) = \sqrt{\mu_0} \vec{j}_e + \sqrt{\beta} \vec{j}_m + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \sqrt{\beta} \alpha \vec{T}). \quad (46.6)$$

Vergleicht man diese Resultate mit denen von Heim⁽⁹⁾, so stellt man ein paar Abweichungen fest. Wenn die Heimschen Grössen mit dem Index H versehen werden, so weichen folgende Gleichungen von seinen Ausdrücken ab:

Gl. (42.2): $\vec{G}_H = \sqrt{\epsilon_0} \vec{E} + \sqrt{\alpha} \vec{T}$ *Heim fehlt $\frac{E}{\omega}$*

Gl. (42.4): $\rho_H = \sqrt{\mu_0} \rho_e + \frac{\omega}{c} \sqrt{\beta} \rho_m$

Gl. (45.3): $\nabla \cdot \vec{C}_H = 0$ *ausgl. dadurch, weil $\vec{E}$ und $\vec{T}$ gekoppelt sind, somit Heim falsch*

Es ist nicht klar, woher die Unterschiede kommen, aber da $\frac{\omega}{c} = \frac{4}{3}$ ist, sind die Abweichungen auf jeden Fall nicht gross.

Die statischen Gleichungen (46.1) und (46.2) wurden separiert, weil es unwahrscheinlich ist, dass $\vec{E}$ und $\vec{T}$ auch im statischen Fall gekoppelt sind. Gleichung (46.2) ist der bekannte Ausdruck für die Divergenz eines Newtonschen Gravitationsfeldes,

$$\nabla \cdot \vec{T} = 4\pi\gamma \rho_m. \quad (47)$$

Laut dieser Relation müsste der Wert von α gleich $1/4\pi\gamma$ sein, was auch schon in Ref. (1), S. 185, festgestellt worden ist. Dieser Wert ist wesentlich grösser als der von Heim angegebene ($\alpha_H = 3/64\pi\gamma$, Ref. (10)). Der Faktor β wäre entsprechend kleiner, nämlich $9\pi\gamma/4c^2$, wodurch sich die im Bericht vom 31.3.1983 angegebenen Magnetfelder der Erde um den Faktor 0.433 verringern würden. Das gäbe eine bessere Übereinstimmung mit den gemessenen Feldern. Die neuen Felder wären

radial: $B_1^+(r_0, \alpha) = 1,76 \sin \alpha \text{ Gauss}$

tangential: $B_2^+(r_0, \alpha) = 0,881 \cos \alpha \text{ Gauss}$

Leider würde sich das Magnetfeld der rotierenden Scheibe ebenfalls um den Faktor 0,433 reduzieren.

Falls aber

$$\mu = 6.6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} = C \Rightarrow \frac{(4\pi\mu)^{\frac{1}{2}}}{c^2} = \beta^2$$

$$\boxed{\beta = \frac{4\pi\mu}{c^2}} = \underline{\underline{9,378 \cdot 10^{-27} \frac{\text{m}}{\text{kg}}}}$$

Falls $\omega = \frac{4}{3}c \Rightarrow$

$$\beta = \frac{9\pi\mu}{4c^2} = \underline{\underline{5,241 \cdot 10^{-27} \frac{\text{m}}{\text{kg}}}}$$

Nach Heim gilt aber da $\alpha = \frac{3}{64\pi\mu}$

$$\beta = \frac{2\pi\mu}{4c^2} = \frac{\frac{64\pi\mu \cdot 3}{3 \cdot 16 c^2}}{4} = \frac{12\pi\mu}{c^2} = \underline{\underline{2,795 \cdot 10^{-26}}}$$

Magnetfelder ~~nicht~~ ändern sich mit Faktor $\sqrt{\beta}$

Literaturangaben

- 1) Ungewöhnliche Gravitations-Phänomene, Herausgeber I.Brand, 148-220, 1975
- 2) I. von Ludwiger, Die einheitliche geometrische 6-dimensionale Quantenfeldtheorie von B. Heim, TN-AE 331-7/81, MBB (1981)
- 3) B. Heim, Elementarstrukturen der Materie, Band I, Resch Verlag, Innsbruck 1980
- 4) Ref. (3), S. 8
- 5) Ref. (3), S. 8
- 6) Ref. (3), S. 13
- 7) Ref. (3), S. 13
- 8) Ref. (3), S. 14
- 9) I. von Ludwiger, private Mitteilung
- 10) Ref. (3), S. 48