

Appendix 1Berechnung der Feldlinien

Die Feldlinien im allgemeinen Fall erfüllen die Beziehungen (sphaerische Geometrie):

$$\frac{dr}{B_1} = \frac{r d\theta}{B_2} = \frac{r \sin\theta dp}{B_3} \quad (A1)$$

Da B_3 bei uns null ist, fällt der dritte Term weg.

Innen:

$B(r, \theta)$, Gl. (37), hat die Form

$$\begin{aligned} B_1(r, \theta) &= A(a - \eta^2) \cos\theta \\ B_2(r, \theta) &= -A(a - 2\eta^2) \sin\theta \end{aligned} \quad (A2)$$

$$a = \frac{1 + 4 \frac{\epsilon_0}{\mu}}{1 + 2 \frac{\epsilon_0}{\mu}}, \quad \eta = \frac{r}{r_0} \quad (A3)$$

Entlang den Feldlinien gilt daher

$$\frac{dz}{(a - \eta^2) \cos\theta} = - \frac{\eta d\theta}{(a - 2\eta^2) \sin\theta} \quad (A4)$$

oder

$$\frac{a - 2\eta^2}{\eta(a - \eta^2)} dz = - \cot\theta d\theta \quad (A5)$$

Diese Gleichung wird integriert unter Beachtung von

$$\int \frac{a - 2z^2}{z(a - z^2)} dz = \ln z \sqrt{a - z^2} + C$$

(A6)

$$\int \cot \theta d\theta = \ln \sin \theta + C.$$

Folglich ist

$$\ln z \sqrt{a - z^2} = - \ln \sin \theta + C = - \ln \sin \theta - \ln C = - \ln C \sin \theta$$

und

$$C \sin \theta = \frac{1}{z \sqrt{a - z^2}}. \quad (A7)$$

Au der Oberfläche ist $z=1$. Wir wählen gleichmäßig verteilte Schnittpunkte der Feldlinien mit der Kugeloberfläche, z. B. $\theta_0 = 12^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$ und 90° . Dann ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{a-1} \sin \theta_0} \quad (A8)$$

und

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a-1} \sin \theta_0}{z \sqrt{a - z^2}}. \quad (A9)$$

Es ist günstiger die Cartesischen Koordinaten der Feldlinien zu berechnen. Diese sind, mit $x = z \sin \theta$,

$$x = \frac{\sqrt{a-1} \sin \theta_0}{\sqrt{a - z^2}} \quad (A10a)$$

$$y = \sqrt{z^2 - x^2}. \quad (A10b)$$

Alle Feldlinien im Linsen haben einen Punkt auf der x-Achse, der dem Zentrum am nächsten liegt. Die Linien, die im Linsen geschlossen

sind, haben ausserdem einen Punkt auf der x-Achse, der dem Zentrum am nächsten liegt. Diese beiden Punkte, bei denen $\sin \alpha = 1$ ist, berechnen sich aus

$$\eta_{\min}^2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2} = x_{\min}, \quad y = 0 \quad (A 11)$$

$$\eta_{\max}^2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - d^2} = x_{\max}, \quad y = 0,$$

wobei

$d = \sqrt{a-1} \sin \theta_0$ oder eine beliebige andere Konstante im Falle von Gl. (A 9) und (A 10a)

Bei $z=1$ ist $x = \sin \theta_0$ und $y = \cos \theta_0$. Ausserdem gibt es einen Punkt auf der x-Achse in dem das Feld vollständig verschwindet.

Dieser liegt bei

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{a}{2}} = x_0, \quad y_0 = 0. \quad (A 12)$$

Aussum:

Die äusseren Felder sind

$$\begin{aligned} B_1^r(r, \theta) &= B \frac{2}{\eta^3} \cos \theta \\ B_2^r(r, \theta) &= B \frac{1}{\eta^3} \sin \theta. \end{aligned} \quad (A 13)$$

Folglich ist entlang der Feldlinien

$$\frac{d\eta}{\eta \cos \theta} = \frac{\eta d\theta}{\sin \theta}, \quad (A 14)$$

da der Faktor η^3 sich weghört. Integration ergibt

$$A = 4$$

$$C \sin \theta = \sqrt{z} . \quad (A15)$$

Bemerkst man die gleiche Konvention wie vorher, nämlich dass

$\theta = \theta_0$ wenn $z = 1$ ist, so ist

$$C = \frac{1}{\sin \theta_0} \quad (A16)$$

und

$$\sin \theta = \sqrt{z} \sin \theta_0 . \quad (A17)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} x &= z \sqrt{z} \sin \theta_0 \\ y &= \sqrt{z^2 - x^2} . \end{aligned} \quad (A18)$$

Die Feldlinien schneiden die x -Achse im Punkt

$$z_{\max} = \frac{1}{\sin^2 \theta_0} = x_{\max}^2 , \quad y = 0 . \quad (A19)$$