

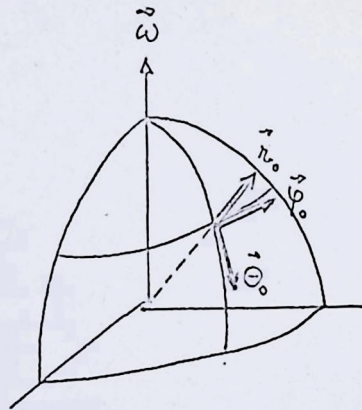
6.1.77

Berechnung von Dr. Ruerbach

Ausgangsgleichung:

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = -k \vec{\omega} \times \nabla \varphi, \quad k = \frac{1}{c} \times 10^3 \sqrt{\frac{3\mu_0}{\pi \gamma}}$$

Wir benutzen Kugelkoordinaten,



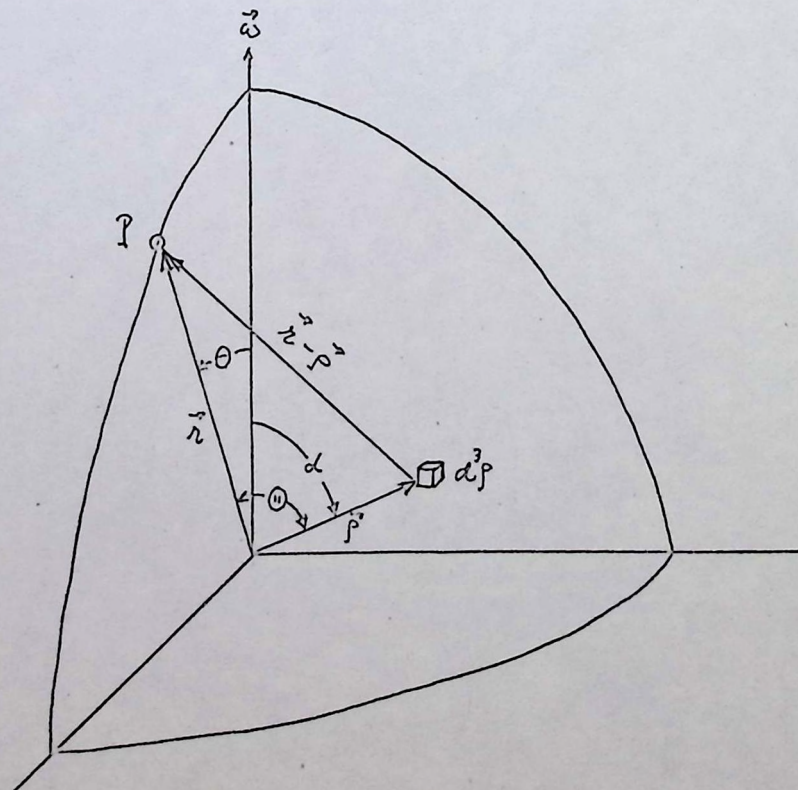
$\vec{e}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\varphi}_0$ = orthogonale
Einheitsvektoren

Kugelkoordinaten

Mit R =Erdradius ist

$$r < R: \quad \nabla \varphi(r) = \left(\frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \right) \vec{r}_0$$

$$r > R: \quad \nabla \varphi(r) = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_0 \frac{R^3}{r^2} \vec{r}_0 \quad (\text{wird später null gesetzt})$$



Im Punkte P ist das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, \theta) = -\frac{1}{4\pi} k \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{\omega} \times \nabla \varphi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' , \quad d^3r' = r'^2 dr' \sin \alpha d\alpha d\phi .$$

wegen der Symmetrie des Problems ist

$$\vec{A}(\vec{r}, \theta) = A_p(r, \theta) \vec{\varphi}_0 . \quad |\vec{\omega} \times \nabla \varphi(\vec{r}')| = \omega \cdot \nabla \varphi(\vec{r}') \cdot \vec{m} \sin \alpha$$

1) $r < R$:

$$A_p(r, \theta) = -\frac{1}{3} k \gamma \omega_p \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \left\{ \int_0^r \frac{p^3 dp}{|\vec{r} - \vec{p}|} + \int_r^R \frac{p^3 dp}{|\vec{r} - \vec{p}|} + R^3 \int_R^{\infty} \frac{dp}{|\vec{r} - \vec{p}|} \right\} ,$$

2) $r > R$:

$$A_p(r, \theta) = -\frac{1}{3} k \gamma \omega_p \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \left\{ \int_0^R \frac{p^3 dp}{|\vec{r} - \vec{p}|} + R^3 \int_R^{\infty} \frac{dp}{|\vec{r} - \vec{p}|} \right\} ,$$

$$|\vec{r} - \vec{p}| = \sqrt{r^2 + p^2 - 2rp \cos \alpha} .$$

Für $p > r$ sind die dritten Integrale in jeder Zeile $\sim \int_R^{\infty} \frac{dp}{p}$ und divergieren daher logarithmisch. Wenn wir aber annehmen, dass $\vec{\omega} \times \nabla \varphi = 0$ ist wenn $r > R$, so fallen diese Integrale weg und der Rest konvergiert.

Folgende Entwicklungen werden benutzt:

Legendresche Polynome

$$a) \quad \rho < R: \frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \Theta}} = \frac{1}{R} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \Theta)$$

$$b) \quad \rho > R: \frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \Theta}} = \frac{1}{\rho} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \Theta)$$

$$c) \quad P_{\ell}(\cos \Theta) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, 0) Y_{\ell m}^{*}(\alpha, \phi)$$

Das Integral über ϕ ergibt

$$\int_0^{2\pi} P_{\ell}(\cos \Theta) d\phi = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, 0) \int_0^{2\pi} Y_{\ell m}^{*}(\alpha, \phi) d\phi = 2\pi P_{\ell}(\cos \Theta) P_{\ell}(\cos \alpha)$$

Setzt man die Entwicklungen in die Ausdrücke für das Vektorpotential ein, so findet man folgende Resultate:

$$r < R: \quad A_{\varphi}(r, \theta) = \frac{2\pi}{3} k \omega \gamma \rho_0 R^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell-3} \left[\xi^{2\ell} - \frac{4\ell+1}{2(\ell+2)} \xi^3 \right] s_{2\ell} P_{2\ell}(\cos \theta)$$

$$r > R: \quad A_{\varphi}(r, \theta) = -\frac{\pi}{3} k \omega \gamma \rho_0 R^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{s_{2\ell}}{\ell+2} \frac{1}{\xi^{2\ell+1}} P_{2\ell}(\cos \theta)$$

$$r = R: \quad A_{\varphi}(R, \theta) = -\frac{\pi}{3} k \omega \gamma \rho_0 R^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{s_{2\ell}}{\ell+2} P_{2\ell}(\cos \theta)$$

mit $\xi = \frac{r}{R}$, $s_{2\ell} = \int_0^{\pi} \sin \alpha P_{2\ell}(\cos \alpha) d\alpha = -\frac{\pi(2\ell-3)!!(2\ell-1)!!}{2^{2\ell+1} \ell! (\ell+1)!}$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.

Das Magnetfeld ergibt sich aus $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ oder

$$H_r(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A_{\varphi}(r, \theta); \quad H_{\theta}(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_{\varphi}(r, \theta).$$

Durch Differenzieren findet man:

$$r < R: H_{\lambda}(\lambda, \theta) = \frac{2\pi}{3} \frac{k\omega\gamma p_0}{\sin\theta} R^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell+3} \left[\tilde{\zeta}^{2\ell+1} - \frac{4\ell+1}{2(\ell+2)} \tilde{\zeta}^2 \right] S_{2\ell} \left[(\ell+1) \overset{\omega\theta}{P_{\ell+1}}(\overset{\omega\theta}{\cos\theta}) - 2\ell \cos\theta \overset{\omega\theta}{P_{\ell}}(\overset{\omega\theta}{\cos\theta}) \right]$$

$$H_{\theta}(\lambda, \theta) = -\frac{2\pi}{3} k\omega\gamma p_0 R^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell+3} \left[(\ell+1) \tilde{\zeta}^{2\ell+1} - \frac{2(4\ell+1)}{\ell+2} \tilde{\zeta}^2 \right] S_{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta)$$

$$r > R: H_{\lambda}(\lambda, \theta) = -\frac{\pi}{3} \frac{k\omega\gamma p_0}{\sin\theta} R^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{S_{2\ell}}{\ell+2} \frac{1}{\tilde{\zeta}^{2\ell+2}} \left[(\ell+1) P_{\ell+1}(\cos\theta) - 2\ell \cos\theta P_{\ell}(\cos\theta) \right]$$

$$H_{\theta}(\lambda, \theta) = -\frac{2\pi}{3} k\omega\gamma p_0 R^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell}{\ell+2} \frac{1}{\tilde{\zeta}^{2\ell+2}} S_{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta)$$

$$r = R: H_{\lambda}(R, \theta) = -\frac{\pi}{3} \frac{k\omega\gamma p_0}{\sin\theta} R^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{S_{2\ell}}{\ell+2} \left[(\ell+1) P_{\ell+1}(\cos\theta) - 2\ell \cos\theta P_{\ell}(\cos\theta) \right]$$

$$H_{\theta}(R, \theta) = -\frac{2\pi}{3} k\omega\gamma p_0 R^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\ell}{\ell+2} S_{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta)$$

Gebenstorf, den 31.3.1983

Lieber Herr von Ludwiger,

Letzten Freitag (25.3.) fand ich Herrn Harasims Brief in Würenlingen vor und beantwortete ihn umgehend. Es hat mir sehr leid getan, nicht kommen zu können, aber es liess sich nicht ändern. Vielen Dank für Ihre freundliche Vermittlerrolle.

Im Brief von Herrn Harasim lag ein Bericht über die Heimsche Methode zur Berechnung des Magnetfeldes. Sind Sie dessen Verfasser? Ich ersah daraus, dass auch ferromagnetische Substanzen für den rotierenden Körper in Erwägung gezogen werden. Durch das erhöhte Magnetfeld hofft man offenbar die hohe Drehzahl herabsetzen zu können.

Nach unserem ersten Telefongespräch habe ich meine ursprünglichen Rechnungen noch einmal wiederholt und säuberlich kopiert, um sie mit nach Ottobrunn zu nehmen. Leider beschränkten sie sich auf Materialien mit $\mu/\mu_0=1$. Nach Erhalt des Briefes von Herrn Harasim habe ich die Berechnungen mit einer anderen Methode mit $\mu \neq \mu_0$ (μ =Permeabilität im Körper) wiederholt. Sie finden sie als Beilage zu diesem Brief. Vielleicht lassen sich die Erfolgchancen des Experiments aufgrund dieser Abschätzungen etwas besser beurteilen. Da ich aber kein Fachmann auf dem Gebiet des Elektromagnetismus bin, wäre es empfehlenswert, die Rechnungen zu überprüfen.

Ein Vergleich mit dem Magnetfeld der Erde (S.9) zeigt, dass das berechnete Feld mit Heims Konstanten um den Faktor 6,5 und mit meinen Konstanten um den Faktor 4,3 zu gross ist. Ich lege Ihnen eine Tabelle aus meiner ersten Arbeit bei, in der die gemittelten Felder $\bar{B}_H$ und $\bar{B}_A$ mit den gemessenen Feldern verschiedener Himmelskörper verglichen werden. Da die Mittellung nicht eindeutig ist, kann keine genaue, sondern nur grössenordnungsmässige Übereinstimmung erwartet werden. Etwas beunruhigend ist die Tatsache, dass vor kurzem ein Pulsar (PSR 1937 + 214 in der Konstellation Vulpeca) entdeckt wurde, der mit 642 Hz 20 Mal schneller als HER X-1 rotiert und trotzdem nur ein Magnetfeld von ca. 10^8 - 10^9 Gauss zu haben scheint. Nach Heim müsste der Wert $1,5 \times 10^{11}$ bzw. $2,1 \times 10^{10}$ betragen.

Bezüglich des im Bericht vorgeschlagenen Experiments einer rotierenden Kugel erweist sich ferromagnetisches Material als lange nicht so günstig für eine Messung des äusseren Magnetfeldes wie vielleicht vermutet. Der Gewinn bei $\mu/\mu_0 \gg 1$ ist bestenfalls ein Faktor 3. Der Grund ist, dass das radiale B-Feld an der Oberfläche stetig, aber um den Faktor $2\mu_0/\mu$ gegenüber seinem Wert im Zentrum reduziert ist. Die tangentielle Komponente von B ist zwar nicht reduziert, aber auch nicht stetig, und zwar ist das äussere Feld gerade um den Faktor μ_0/μ schwächer als das innere. Dadurch geht fast der ganze ferromagnetische Gewinn wieder verloren. Dazu kommt der Abstand des Squidmagnetometers von der Kugeloberfläche, der das Feld wegen der $1/r^3$ -Abhängigkeit um fast 2 weitere Grössenordnungen verringert. Sie erkennen diesen Sachverhalt aus den Resultaten auf Seite 10 unten: $B_1(\mu)$ mit $\mu/\mu_0=1000$ auf der Achse im Abstand von 30 cm beträgt nur $4,71 \times 10^{-9}$ Gauss.

Die Feldlinien für Fall 1 ($\mu/\mu_0=1$) und Fall 2 ($\mu/\mu_0=1000$) sind in Fig. 2 und 3 dargestellt. Da die Feldlinien von Fall 2 (Fig. 3) so zusammengedrängt sind, dass man sie garnicht mehr richtig zeichnen kann, zeigt Fig. 4 einen anderen Fall mit $\mu/\mu_0=50$ in vergrössertem Massstab. Man erkennt deutlich den scharfen Knick in den Feldlinien an der Kugeloberfläche, der im Fall $\mu/\mu_0=1000$ noch extremer ist.

Da sich das äussere Feld als so schwach erweist, sollte man das Feld im Zentrum messen, wo es rund 10^5 mal stärker ist, nur wie? Bei diesen schwachen Feldern kann wahrscheinlich kein permanenter Magnetismus erzeugt werden, den man nach Stillstand der Kugel messen könnte, oder gibt es doch so ein Material? Vielleicht kann einem ein Fachmann ein paar Rat-schläge geben. Oder besteht die Möglichkeit, das Feld im Zentrum während der Rotation zu messen?

Die beigegeführten Rechnungen stimmen nicht ganz, weil $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ und $\vec{A} = 0$ gesetzt wurde. Da die Divergenz von $\vec{B}$ aber nicht verschwin-det sondern, wie diejenige von $\vec{J}$, proportional zur Feldmasse ist, sind beide Ansätze nicht ganz korrekt. Ich glaube, dass man die vollständigen Gleichungen lösen könnte, habe das Problem aber noch nicht näher studiert. Trotzdem fehlen meiner Ansicht nach immer noch 3 Gleichungen. Um das elektrische und das magnetische Feld zu bestimmen, braucht man 4 Maxwellsche Gleichungen. Da bei Heim noch zwei weitere Felder dazukommen, sollte man eigentlich 8 Gleichungen haben um die Felder separat be-rechnen zu können. Wenn MBB wirklich Geld in ein Experiment investieren will, wäre es doch eine gute Gelegenheit Herrn Heim zu veranlassen, auch den Rest der Gleichungen zu liefern. Viel-leicht lassen sich andere Effekte experimentell leichter nach-weisen.

Meine Frau ist am Montag operiert worden und konnte das Spital schon am Dienstag wieder verlassen. Am Mittwoch wurde uns mit-geteilt, dass der Befund gut wäre, worüber wir beide natürlich sehr erleichtert sind. Am gleichen Tag erfuhren wir auch, dass unser jüngerer Sohn sein Abitur bestanden hat. Zwei gute Nach-richten an einem Tag!

Ich wünsche Ihnen und Ihrer Familie recht angenehme Osterfeier-tage.

Mit besten Grüssen

Ihr

Hans Auerbach

Das gravitative Magnetfeld eines rotierenden Körpers

Heißen Ausgangsgleichung unter Vernachlässigung des Orthogonaltrajektorienfeldes $\vec{H}$:

$$\nabla \times \sqrt{\mu_0} \vec{H} = \sqrt{\beta} \rho_m \vec{v} \quad (1)$$

(ρ_m = Massendichte). Wenn μ die Permeabilität des Materials ist, so ist $\vec{B} = \mu \vec{H}$ innen und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ aussen. Im allgemeinen gilt

daher

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \vec{v} \quad (2)$$

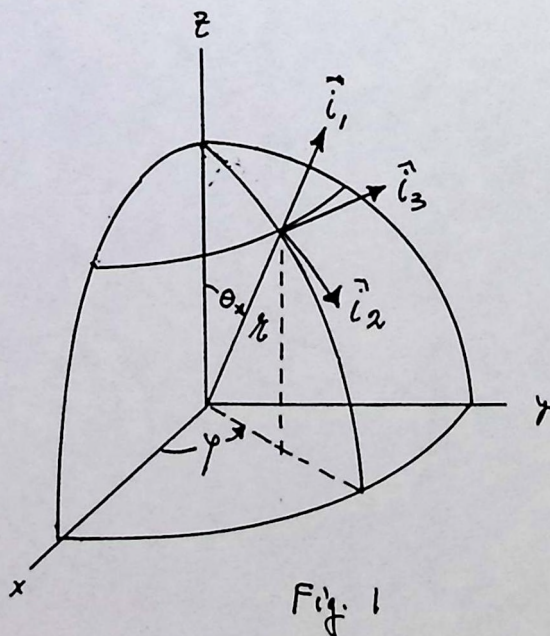
$\vec{B}$ ist als Rotation eines Vektorpotentials $\vec{A}$ ausdrückbar,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3)$$

so daß wir die Beziehung

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \vec{v} \quad (4)$$

für $\vec{A}$ aus Gl. (2) und (3) erhalten.



Im sphärischen Koordinatensystem von Fig. 1 ist

$$\vec{r} = \omega_0 r \sin \theta \vec{e}_3 \quad (5)$$

Man braucht daher nur die $\vec{e}_3$ -Komponente von $\nabla \times \nabla \times \vec{A}$ und nur die A_3 -Komponente von $\vec{A}$, da $\vec{A}$ immer parallel zu $\vec{r}$ ist. Außerdem hängt $A_3 \equiv A$ nur von den Koordinaten r und θ ab. Für Gl. (4) erhält man daher

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) A(r, \theta) = -\mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r \sin \theta$$

oder, nach Durchmultiplizieren mit r^2

$$\left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) A(r, \theta) = -\mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r^3 \sin \theta \quad (6)$$

Lösung im Inneren des Körpers

Wir betrachten $A(r, \theta)$ im Inneren mit $\bar{A}(r, \theta)$. Es besteht aus der Summe $\bar{A}_h + \bar{A}_p$, wobei $\bar{A}_h$ die Lösung der homogenen Gleichung ist, und $\bar{A}_p$ eine partikuläre Lösung der Gleichung.

$\bar{A}_h$ erfüllt die Gleichung

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \bar{A}_h(r, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \bar{A}_h(r, \theta) = 0 \quad (7)$$

Mit dem üblichen Separationsansatz

$$\bar{A}_h(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \quad (8)$$

erhält man die Gleichungen

$$r \frac{d^2}{dr^2} r R(r) - C R = 0 \quad (9a)$$

$$\frac{d}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \Theta(\theta) + C \Theta(\theta) = 0 \quad (9b)$$

Gleichung (9a) hat die Lösung

$$R(r) = r^l, \quad l = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Die Lösungen r^l können wegen der Singularität bei $r=0$ im Inneren nicht benutzt werden. Die Konstante C ergibt sich damit zu

$$C = l(l+1) \quad (11)$$

Setzt man

$$\cos \theta = \eta$$

in Gl. (9b) und benutzt Gl. (11) so erhält man

$$(1-\eta^2) \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Theta}{d\eta} + [l(l+1) - \frac{1}{1-\eta^2}] \Theta(\eta) = 0 \quad (12)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die assoziierte Legendre-Funktion P_l' ,

$$\Theta(\theta) = P_l'(\cos \theta), \quad l = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$P_1'(\cos \theta) = \sin \theta$$

$$P_2'(\cos \theta) = 3 \sin \theta \cos \theta \quad (14)$$

$$P_3'(\cos \theta) = \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$$

Der Spezialfall $l=0$ ($C=0$) lässt sich Gl. (9b) direkt integrieren und ergibt

$$l=0: \quad \Theta(\theta) = A_0^- \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (15)$$

Die allgemeinste Lösung der homogenen Gleichung ist daher

$$A_h^-(r, \theta) = A_0^- \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l^- r^l P_l'(\cos \theta) \quad (16)$$

Für die partikuläre Lösung wählen wir

$$A_p^-(r, \theta) = A_p^- r^3 \sin \theta \quad (17)$$

Setzt man das in Gl. (6) ein, so bestimmt sich A_p^- zu

$$A_p^- = - \frac{\mu}{10} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m$$

Damit wird die Gesamtlösung im Inneren des Körpers

$$A(r, \theta) = - \frac{\mu}{10} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r^3 \sin \theta + A_0^- \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l^- r^l P_l'(\cos \theta) \quad (18)$$

Lösung im Vakuum

Im Vakuum bezeichnen wir $A(r, \theta)$ mit $A^+(r, \theta)$. Da $\rho_m = 0$ ist, ist $A^+(r, \theta)$ die Lösung der Gleichung

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r A^+(r, \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A^+(r, \theta) = 0 \quad (19)$$

Dies führt wieder auf die Gleichungen (9a) und (9b). Da $A^+(r, \theta)$ mit $r \rightarrow \infty$ verschwinden muss, brauchen als Lösung nur die r^{-l}

in Frage, mit $l \neq 0$, da ein konstantes Term nicht verschwinden würde.

Folglich ist

$$R(r) = r^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (20)$$

mit

$$C^+ = l(l-1) \quad (21)$$

Die entsprechende Lösung von Gl. (9b) für $\Theta^+(r)$ mit $C^+ = l(l-1)$ ist

$$\Theta^+(r) = P'_{l-1}(\cos \theta), \quad l = 2, 3, \dots \quad (22)$$

Der Sonderfall $l=1$ hat wieder die Lösung

$$l=1: \quad \Theta^+(r) = A_0^+ \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (23)$$

Die Gesamtlösung im Vakuum ist damit

$$A^+(r, \theta) = A_0^+ \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l^+ \frac{1}{r^{l+1}} P'_l(\cos \theta) \quad (24)$$

Die rotierende Kugel

Die allgemeinen Randbedingungen an der Oberfläche des rotierenden Körpers sind:

$$\vec{A} = \text{stetig} \quad (25)$$

$$\text{Temperaturabruptpunkte von } \vec{H} = \text{stetig}$$

Aus einfachen lassen sich diese Bedingungen für die rotierende Kugel formulieren. Wenn der Kugelradius r_0 ist, so ist

$$\vec{A}(r_0, \theta) = \vec{A}^+(r_0, \theta) \quad (26a)$$

$$\frac{1}{\mu} \vec{B}_2^-(r_0, \theta) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_2^+(r_0, \theta) \quad (26b)$$

wobei B_2 die i_2^1 -Komponente (vgl. Bg. 1) bedeutet.

Mit

$$B_2(r, \theta) = (\nabla \times \vec{A})_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A(r, \theta) \quad (42)$$

lässt sich Randbedingung (26b) so schreiben:

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial r} r A(r, \theta) \right)_{r=r_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} r A(r, \theta) \right)_{r=r_0} \quad (43)$$

Die Randbedingungen (26a) und (28) resultieren in den Gleichungen

$$\begin{aligned} \bullet \left(A_1^- r_0 - \frac{\mu}{10} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r_0^3 \right) P_1'(\cos \theta) + A_0^- \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{\ell=2}^{\infty} A_{\ell}^- r_0^{\ell} P_{\ell}'(\cos \theta) = \\ = A_0^+ \frac{1}{r_0} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{\ell=1}^{\infty} A_{\ell}^+ \frac{1}{r_0^{\ell+1}} P_{\ell}'(\cos \theta) \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \left(2 A_1^- r_0 - \frac{2}{5} \mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r_0^3 \right) P_1'(\cos \theta) + \frac{1}{\mu} A_0^- \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\mu} \sum_{\ell=2}^{\infty} (\ell+1) A_{\ell}^- r_0^{\ell} P_{\ell}'(\cos \theta) = \\ = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell A_{\ell}^+ \frac{1}{r_0^{\ell+1}} P_{\ell}'(\cos \theta) \end{aligned} \quad (29b)$$

Man sieht, dass A_0^- in (29b) verschwinden muss, wodurch auch $A_0^+ = 0$

sein muss. Das ist wohl auch wegen der Singularität bei $\theta = 0$ und π vorzuziehen. Um die übrigen Konstanten zu bestimmen, werden Gl. (29a) und (29b) mit $P_n'(\cos \theta)$ durchmultipliziert und über θ integriert, wobei man die Orthogonalität der Randharmoniken ausnützt:

$$\int_{-1}^1 P_n'(\eta) P_{\ell}'(\eta) d\eta = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!} \delta_{n\ell} \quad (30)$$

Es ergeben sich daraus folgende Bestimmungsgleichungen für die Konstanten:

$$l=1: \quad A_1^- r_0 = \frac{\mu}{10} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r_0^3 = A_1^+ \frac{1}{r_0^2} \quad (31)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(2 A_1^- r_0 - \frac{2}{5} \mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r_0^3 \right) = -\frac{1}{\mu_0} A_1^+ \frac{1}{r_0^2}$$

$$l=2, 3, \dots: \quad A_l^- r_0^l = A_l^+ \frac{1}{r_0^{l+1}} \quad (32)$$

$$\frac{1}{\mu} (l+1) A_l^- r_0^l = -\frac{1}{\mu_0} l A_l^+ \frac{1}{r_0^{l+1}}$$

Um konsistent zu sein, müsste die Relation $\frac{l}{\mu_0} + \frac{l+1}{\mu} = 0$ für das homogene Gleichungssystem (32) erfüllt sein. Da sie das offenbar nicht ist, hat Gl. (31) nur die trivialen Lösungen

$$A_l^- = A_l^+ = 0, \quad l=2, 3, \dots \quad (33)$$

A_1^- und A_1^+ bestimmen sich aus Gl. (31) zu

$$A_1^- = \frac{\mu}{10} \frac{1 + 4 \frac{\mu_0}{\mu}}{1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu}} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r_0^2 \quad (34)$$

$$A_1^+ = \frac{\sqrt{\beta \mu_0}}{5(1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu})} \omega_0 \rho_m r_0^5$$

Schliesslich hat man für die Vektorpotentiale

$$A(r, \theta) = \frac{\mu}{10} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m \left[\frac{1 + 4 \frac{\mu_0}{\mu}}{1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu}} r_0^2 r - r^3 \right] \sin \theta \quad (35)$$

$$A^+(r, \theta) = \frac{\sqrt{\beta \mu_0}}{5(1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu})} \omega_0 \rho_m r_0^5 \frac{1}{r^2} \sin \theta$$

Für die Magnetfelder B_r (radial) und B_z (tangential in Richtung $\vec{e}_z$)
 kennen wir die Relation

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta A(r, \theta) \\ B_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A(r, \theta) \end{aligned} \quad (36)$$

Aus den Gleichungen (35) und (36) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \text{Innen: } B_r^-(r, \theta) &= \frac{\mu}{5} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m \left(\frac{1 + 4 \frac{\mu_0}{\mu}}{1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu}} r_0^2 - r^2 \right) \cos \theta \quad (\text{radial}) \\ B_z^-(r, \theta) &= -\frac{\mu}{5} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m \left(\frac{1 + 4 \frac{\mu_0}{\mu}}{1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu}} r_0^2 - 2 r^2 \right) \sin \theta \quad (\text{tangential}) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \text{Aussen: } B_r^+(r, \theta) &= \frac{2 \sqrt{\beta \mu_0}}{5(1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu})} \omega_0 \rho_m r_0^5 \frac{1}{r^3} \cos \theta \quad (\text{radial}) \\ B_z^+(r, \theta) &= \frac{\sqrt{\beta \mu_0}}{5(1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu})} \omega_0 \rho_m r_0^5 \frac{1}{r^3} \sin \theta \quad (\text{tangential}) \end{aligned} \quad (38)$$

Das Magnetfeld an der Oberfläche

Wir benutzen Gl. (38) mit $r = r_0$, $\rho_m = \frac{3M}{4\pi r_0^3}$ (M = Masse) und $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$
 (α = geographische Breite),

$$\begin{aligned} B_r^+(r_0, \alpha) &= \frac{3}{10\pi} \frac{\sqrt{\beta \mu_0}}{1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu}} \frac{\omega_0 M}{r_0} \sin \alpha \\ B_z^+(r_0, \alpha) &= \frac{3}{20\pi} \frac{\sqrt{\beta \mu_0}}{1 + 2 \frac{\mu_0}{\mu}} \frac{\omega_0 M}{r_0} \cos \alpha \end{aligned} \quad (39)$$

Nach Heine ist $\beta_H = \frac{12\pi\sigma}{c^2}$. Nach meiner Berechnung ist $\beta_A = \frac{21\pi\sigma}{4c^2}$.

Die entsprechenden Felder seien B_H und B_A :

$$B_{1,H}^+(r_0, \alpha) = \frac{3}{5} \frac{\sqrt{\frac{3\sigma\mu_0}{\pi}}}{c(1+\frac{2\mu_0}{\mu})} \frac{\omega_0 \Pi}{r_0} \sin \alpha$$

$$B_{2,H}^+(r_0, \alpha) = \frac{3}{10} \frac{\sqrt{\frac{3\sigma\mu_0}{\pi}}}{c(1+\frac{2\mu_0}{\mu})} \frac{\omega_0 \Pi}{r_0} \cos \alpha$$

$$B_A = 0,6614 B_H$$

Mit $\gamma = 6,6732 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s}^2 \text{ kg}$, $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ kg/m} \text{ s}^2 \text{ A}^{-2}$ für nicht-magnetisches Material erhält man

$$B_{1,H}^+(r_0, \alpha) = 5,9667 \times 10^{-14} \frac{\omega_0 \Pi}{r_0} \sin \alpha \quad \text{Gauss}$$

$$B_{2,H}^+(r_0, \alpha) = 2,9833 \times 10^{-14} \frac{\omega_0 \Pi}{r_0} \cos \alpha \quad \text{Gauss}$$

(ω_0 in rad/s, Π in kg, r_0 in m). Für die Erde:

$$\omega_0 = 7,272 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

$$\Pi = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$r_0 = 6,378 \times 10^6 \text{ m}$$

Damit wird (in Gauss)

$$B_{1,H}^+(r_0, \alpha) = 4,07 \sin \alpha, \quad B_{2,H}^+(r_0, \alpha) = 1,025 \cos \alpha$$

$$B_{1,A}^+(r_0, \alpha) = 2,69 \sin \alpha, \quad B_{2,A}^+(r_0, \alpha) = 1,35 \cos \alpha$$

gemessen: $B_1^+(r_0, \alpha) = 0,624 \sin \alpha, \quad B_2^+(r_0, \alpha) = 0,312 \cos \alpha$

Beispiele

Wir berechnen 2 Fälle, die sich nur dadurch unterscheiden, daß $\mu = \mu_0$ im ersten Fall und $\mu \gg \mu_0$ im zweiten Fall ist. Alle Felder werden für $\theta = 0$ berechnet und mit dem β von Klein. Dann ist

$$1) \text{ bei } r=0: \quad B_1^-(0,0,\mu) = \frac{4\pi}{5} \sqrt{3\pi\gamma\mu} \frac{1}{c} v_0 \rho_m r_0^2 \quad \text{im Zentrum}$$

$$\text{bei } r \geq r_0: \quad B_1^+(r,0,\mu) = \frac{8\pi}{15} \sqrt{3\pi\gamma\mu} \frac{1}{c} v_0 \rho_m \frac{r_0^5}{r^3} \quad \text{auf der Achse}$$

$$1) \text{ bei } r=0: \quad B_1^-(0,0,\mu) = \frac{3}{5} \frac{\mu}{\mu_0} B_1^-(0,0,\mu_0) \quad \text{im Zentrum}$$

$$\text{bei } r \geq r_0: \quad B_1^+(r,0,\mu) = 3 B_1^+(r,0,\mu_0) \quad \text{auf der Achse}$$

Wir wählen:

$$v_0 = 800 \text{ Hz}$$

$$\rho_m = 8000 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{entspricht Eisen})$$

$$r_0 = 0,1 \text{ m}$$

$$r = 0,4 \text{ m}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1000$$

Resultat:

$$B_1^-(0,0,\mu) = 2,51 \times 10^{-7} \text{ Gauss}$$

$$B_1^+(0,4,0,\mu) = 1,57 \times 10^{-9} \quad "$$

$$B_1^-(0,0,\mu) = 1,51 \times 10^{-4} \text{ Gauss}$$

$$B_1^+(0,4,0,\mu) = 4,71 \times 10^{-9} \quad "$$

HINNEIN, KÖRPER	ω_0 RAD/S	M kg	λ_0 m	$\bar{\beta}_H$ T	$\bar{\beta}_A$ T	$\bar{\beta}_{max}, \bar{\beta}_{min}$ GEMESSEN T
ERDE	$7,272 \times 10^{-5}$	$5,98 \times 10^{24}$	$6,378 \times 10^6$	$2,90 \times 10^{-4}$	$1,92 \times 10^{-4}$	$7,0 \times 10^{-5}$ $2,5 \times 10^{-5}$
SONNE	$2,99 \times 10^{-6}$ $2,7 \times 10^{-6}$	$1,99 \times 10^{30}$	$6,960 \times 10^8$	$3,52 \times 10^{-2}$ $3,28 \times 10^{-2}$	$2,33 \times 10^{-2}$ $2,17 \times 10^{-2}$	$2,7 \times 10^{-3}$ 8×10^{-5}
78 YIR.	5×10^{-4} $0,5 \times 10^{-4}$	$7,8 \times 10^{30}$ $7,7 \times 10^{30}$	$1,8 \times 10^9$ 40×10^9	$5,66$ $0,93$	$3,75$ $0,6 \mu$	$0,2$ $0,1$
MOND	$2,66 \times 10^{-6}$	$7,35 \times 10^{22}$	$1,738 \times 10^6$	$4,78 \times 10^{-7}$	$3,16 \times 10^{-7}$	$1,03 \times 10^{-7}$ $3,8 \times 10^{-8}$
MERKUR	$1,44 \times 10^{-6}$	$3,3 \times 10^{23}$	$2,437 \times 10^6$	$7,14 \times 10^{-7}$	$4,72 \times 10^{-7}$	4×10^{-7} 2×10^{-7}
VENUS	$2,99 \times 10^{-7}$	$4,87 \times 10^{24}$	$6,052 \times 10^6$	$1,02 \times 10^{-6}$	$6,76 \times 10^{-6}$	$5,9 \times 10^{-8}$ $2,7 \times 10^{-8}$
JUPITER	$1,733 \times 10^{-4}$	$1,90 \times 10^{27}$	$7,143 \times 10^7$	$2,00 \times 10^{-2}$	$1,32 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{-3}$ 3×10^{-4}
SATURN	$1,706 \times 10^{-4}$	$5,69 \times 10^{26}$	$5,98 \times 10^7$	$6,89 \times 10^{-3}$	$4,56 \times 10^{-3}$	3×10^{-4} 1×10^{-4}
HER X-1	$5,076$	$3,5 \times 10^{30}$	1×10^4 $0,7 \times 10^4$	$7,55 \times 10^9$ $1,08 \times 10^9$	$5,00 \times 10^9$ $7,13 \times 10^9$	7×10^8 5×10^8

$\bar{\beta}_H$: gemitteltes Feld
wie kleine barometrische
 $\beta_H = \frac{12 \pi r}{c^2}$

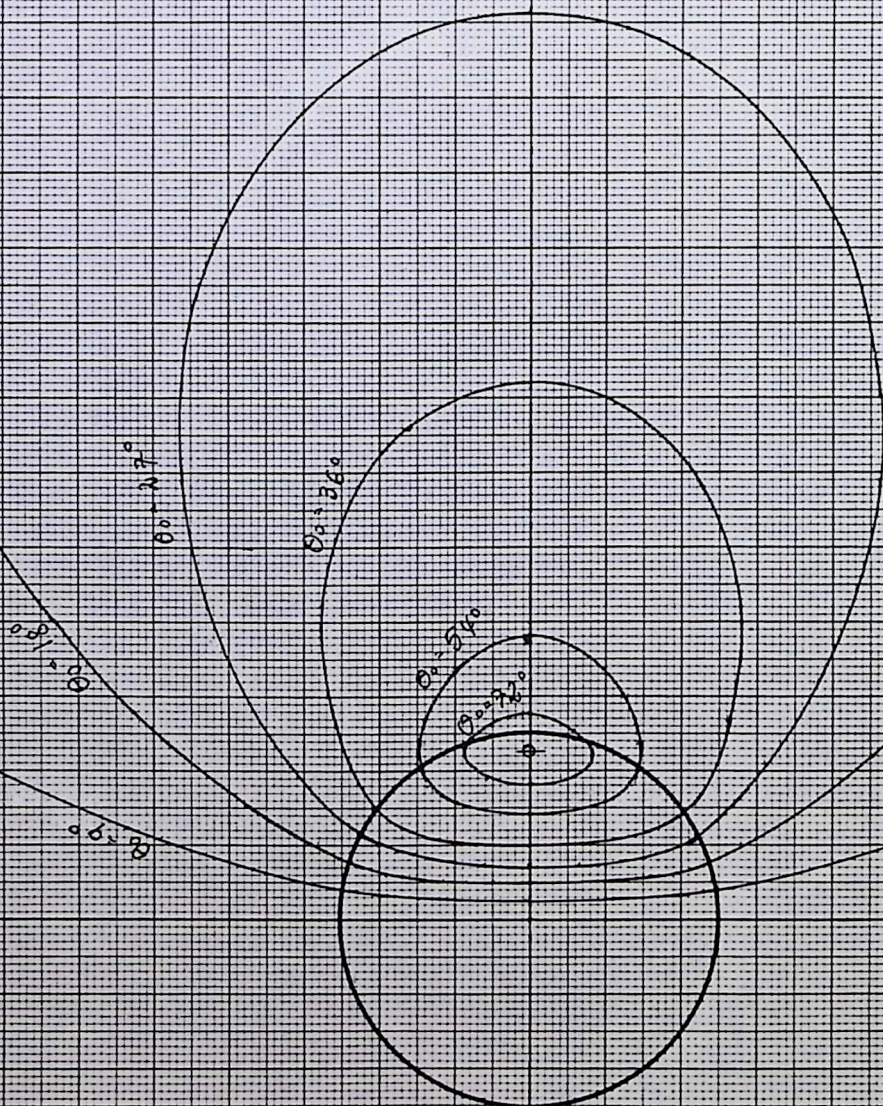
$\bar{\beta}_A$: gewichtetes Feld
wie kleine barometrische
 $\beta_A = \frac{218 r}{4 c^2}$

Notizbuch aus
"Gravitationale
unphysik",
S.-P. Singh
Nature 278,
535-537 (1979)

GRAVITATIVE MAGNETFELD LINIEN

EINER ROTIERENDEN KUGEL

$$\frac{M}{r_0} = 1$$



θ_0 = WINKEL ZWISCHEN ACHE UND

SCHNITTPUNKT DER FELD LINIE

MIT DER OBERFLÄCHE

Fig. 2

GRAVITATIVE MAGNETFELD LINIEN

EINER ROTIERENDEN KUGEL

$$\frac{M}{r^2} = 1000 \frac{1}{\text{cm}^2}$$

θ_0 = WINKEL ZWISCHEN ACHE UND

SCHNITTPUNKT DER FELD LINIE

MIT DER OBERFLÄCHE

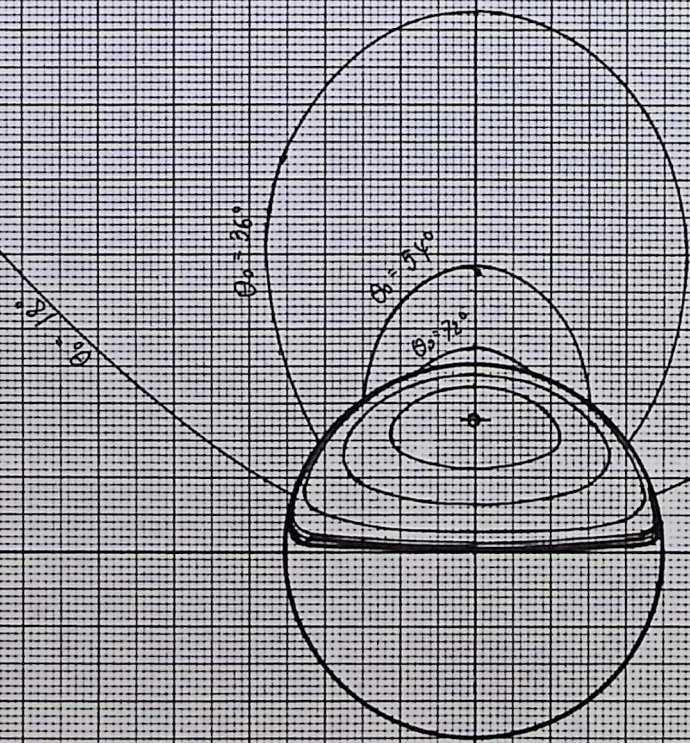
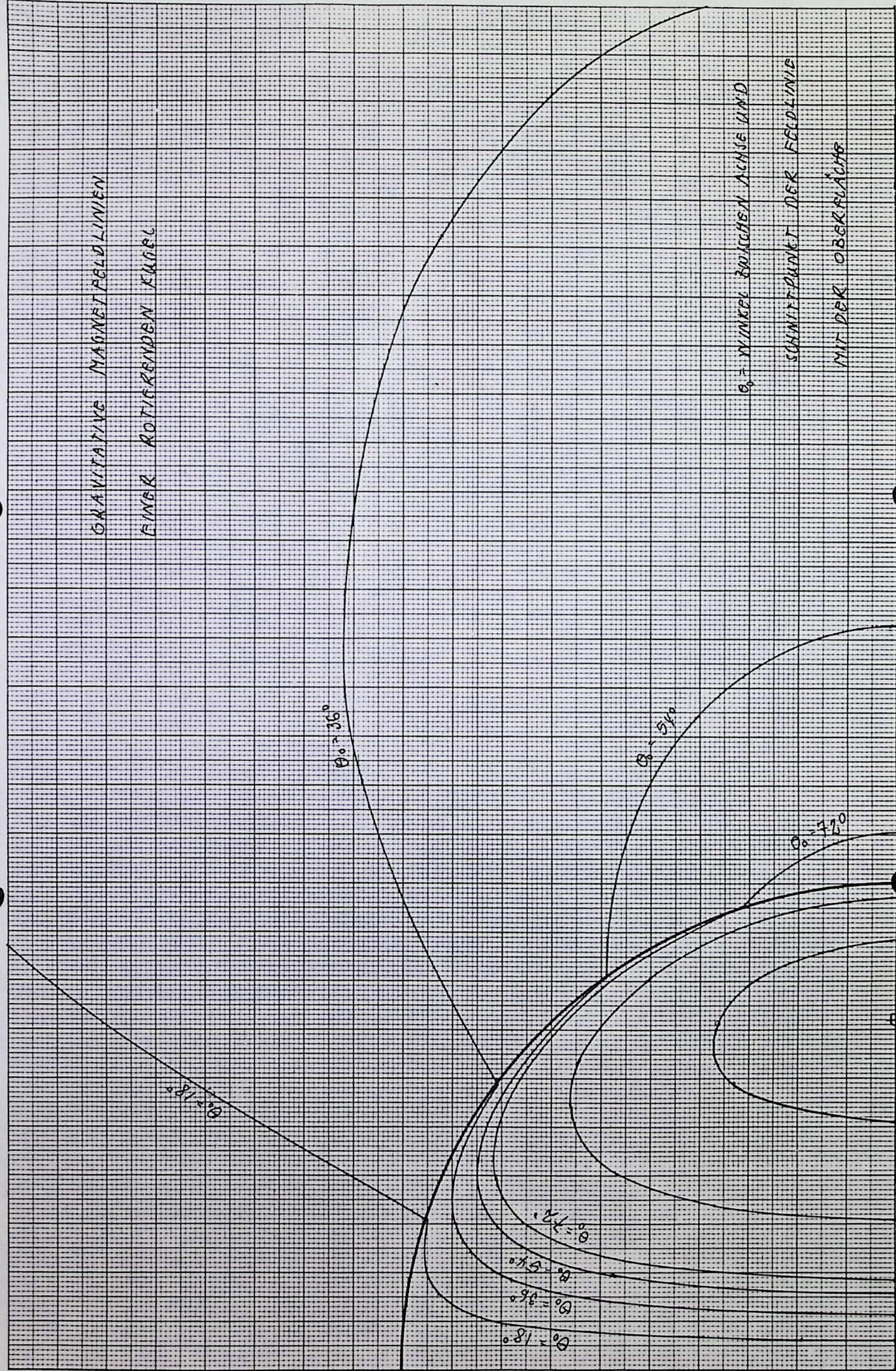


Fig. 3

GRAVITATIVE MAGNETFELD LINIEN
 EINER ROTIERENDEN KUGEL



θ_0 = WINKEL ZWISCHEN AXSE UND
 SCHNITTPUNKT DER FELDLINE
 MIT DER OBERFLÄCHE

Fig. 4

Das gravitative Magnetfeld einer rotierenden Scheibe

Wir beginnen wieder mit Gl. (4) im Bericht über die rotierende Kugel:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \vec{v} . \quad (1)$$

In Zylindergeometrie, dargestellt in Fig. 1, ist $v = r\omega_0$ in Richtung $\hat{e}_\varphi$, so dass das Vektorpotential A nur eine φ -Komponente

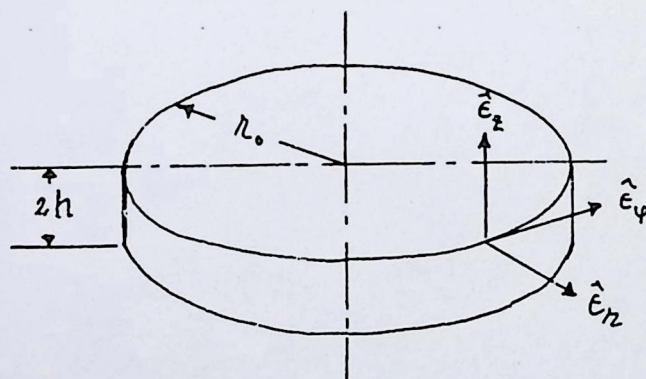


Fig. 1

hat. Für diesen Fall reduziert sich Gl. (1) im Innern der Scheibe zu folgendem Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A(r, z) = -\mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \omega_0 r , \quad (2)$$

wobei unter $A(r, z)$ die Komponente $A_\varphi(r, z)$ zu verstehen ist.

Die Lösung von Gl. (2) setzt sich, wie immer, aus der Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Für die Lösung der homogenen Gleichung,

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_h(r, z) = 0 , \quad (3)$$

macht man den üblichen Separationsansatz

$$A_h(r, z) = R(r) Z(z) . \quad (4)$$

Die Funktionen $R(r)$ und $Z(z)$ erfüllen dann die Gleichungen

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + c^2 Z(z) = 0$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\pm c^2 - \frac{1}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (5)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen, die bei $r=0$ endlich und bezüglich der $z=0$ -Ebene symmetrisch sind, sind je nach Wahl des oberen oder unteren Vorzeichens von c^2

oberes Vorzeichen: $J_1(cr) \cos cz$ (6a)

unteres Vorzeichen: $I_1(cr) \cos cz$ (6b)

(J_1, I_1 = Besselfunktionen der Ordnung 1).

Wenn $c=0$ ist, liefert Gl. (6) nur die triviale Lösung 0, weil die Besselfunktionen für das Argument 0 verschwinden. Die Lösungen von Gl. (5) für $c=0$ sind aber keineswegs trivial, sondern ergeben

$$Z_0(z) = \alpha + \beta z$$

$$R_0(r) = \gamma r + \frac{\delta}{r} \quad (7)$$

Die reguläre, symmetrische Lösung für $c=0$ ist demnach Ar.

Es erweist sich in unserem Fall als günstiger, Lösungen vom Typ (6a) zu wählen. Damit wird die vollständige Lösung der homogenen Gleichung

$$A_h(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(c_n r) \cos c_n z + A_r \quad (8)$$

Eine partikuläre Lösung von Gl. (2) ist

$$A_p(r, z) = -\alpha r^3$$

$$\alpha = \frac{\mu}{g} \sqrt{\frac{b}{\mu_0}} \int_{\mu_0}^{\infty} \omega_0 \, , \quad (9)$$

wie sich leicht nachrechnen lässt. Damit wird das endgültige Vektorpotential

$$A(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(c_n r) \cosh c_n z - a r^3 + A r. \quad (10)$$

Randbedingungen

Im Fall der rotierenden Kugel kennen wir das Feld sowohl im Innern wie im Vakuum. Bildet man das Verhältnis des radialen Feldes $B_1^-(r_0, \theta)$ an der Kugeloberfläche zum radialen Feld $B_1^-(0, 0)$ im Zentrum, so ist das Resultat

$$\frac{B_1^-(r_0, \theta)}{B_1^-(0, 0)} = \frac{2\mu_0}{\mu} \frac{1}{1 + 4 \frac{\mu_0}{\mu}} \cos \theta \approx \frac{2\mu_0}{\mu} \cos \theta.$$

Das Auftreten des Faktors $2\mu_0/\mu = 10^{-3}-10^{-4}$ zeigt, dass das radiale Feld an der Oberfläche um mehrere Grössenordnungen schwächer ist als im Zentrum. Man begeht daher keinen grossen Fehler mit der Annahme, dass das radiale Feld an der Oberfläche ganz verschwindet. Diese Approximation entspricht einer unendlichen Permeabilität des Materials. Setzt man z.B. $\mu_0/\mu = 0$ in Gl. (37) des Berichts über die rotierende Kugel, so ist $B_1^-(r_0, \theta) = 0$, wie erwartet. Da das radiale Feld an der Oberfläche verschwindet, existiert dort nur ein tangenciales Feld, d.h. die Oberfläche fällt mit einer Feldlinie zusammen. Diese Schlussfolgerung gilt ganz allgemein für Körper mit beliebiger Form wenn $\mu_0/\mu = 0$ ist.

Übertragen auf die rotierende Scheibe bedeutet die Approximation einer unendlichen Permeabilität das Verschwinden von B_r am Zylindermantel und von B_z an der oberen und unteren Fläche des Zylinders. Das hat eine sehr beträchtliche Vereinfachung des Problems zur Folge, da die Übergangsbedingungen vom Zylinder zum Vakuum jetzt durch Randbedingungen ersetzt werden können. Der Fall endlicher Permeabilität scheint überhaupt nur numerisch lösbar zu sein.

Die Randbedingungen an der Oberfläche sind:

1) Mantelfläche bei $r=r_0$:

$$B_r(r_0, z) = - \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{r=r_0} = 0. \quad (11)$$

2) Oberfläche bei $z=h$:

$$B_z(r, h) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A(r, z) \right]_{z=h} = 0. \quad (12)$$

Bedingung (1), Gl. (11), führt zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n c_n J_1(c_n r_0) \sinh c_n z = 0 \quad (13)$$

und lässt sich erfüllen, wenn

$$c_n = \frac{j_{1n}}{r_0} \quad (14)$$

gewählt wird, wobei j_{1n} die (tabellierten) n'ten Wurzeln von J_1 sind. Um die Schreibweise etwas zu vereinfachen, setzen wir

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_0} &= \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ \frac{z}{r_0} &= \tau, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{h}{r_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Mit (14) und (15) wird das Vektorpotential

$$A(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(j_{1n} \rho) c_n \sinh j_{1n} \tau - \alpha r_0^3 \rho^3 + A \rho. \quad (16)$$

Im letzten Term wurde der Faktor r_0 in A absorbiert.

Gleichung (16) wird jetzt benutzt, um die zweite Randbedingung, Gl. (12), zu erfüllen. Differentiation nach ρ ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n j_{1n} J_0(j_{1n} \rho) c_n \sinh j_{1n} \tau_0 - 4 \alpha r_0^3 \rho^2 + 2A = 0. \quad (17)$$

Um die Entwicklungskoeffizienten A_n aus dieser Gleichung zu bestimmen, ist es am günstigsten, ρ^2 nach Funktionen $J_0(j_{1n} \rho)$ zu entwickeln. Die $J_0(j_{1n} \rho)$ sind orthogonal im Intervall $0 \leq \rho \leq 1$, aber nicht vollständig, denn eine Konstante lässt sich nicht

durch sie darstellen. Wir müssen zur geplanten Reihenentwicklung noch eine Konstante hinzuaddieren, die separat bestimmt werden muss. Die Entwicklung von ρ^2 ist daher

$$\rho^2 = B + \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(j_{1n} \rho). \quad (18)$$

Nach Multiplikation mit $J_0(j_{1n} \rho)$ und Integration von 0 bis 1 erhält man

$$\int_0^1 \rho^3 J_0(j_{1n} \rho) d\rho = B \int_0^1 \rho J_0(j_{1n} \rho) d\rho + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 \rho J_0(j_{1n} \rho) J_0(j_{1n} \rho) d\rho. \quad (19)$$

Die einzelnen Integrale sind

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^3 J_0(j_{1n} \rho) d\rho &= \frac{2}{j_{1n}^2} J_0(j_{1n}) \\ \int_0^1 \rho J_0(j_{1n} \rho) d\rho &= 0 \\ \int_0^1 \rho J_0(j_{1n} \rho) J_0(j_{1m} \rho) d\rho &= \frac{1}{2} J_0^2(j_{1n}) \text{ wenn } m=n \\ &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (20)$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (19) ein, so findet man für B_n

$$B_n = \frac{4}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n})} \quad (21)$$

und für ρ^2

$$\rho^2 = B + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{1n} \rho)}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n})}. \quad (22)$$

Zur Bestimmung von B setzt man $\rho=1$,

$$1 = B + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{1n}^2}. \quad (23)$$

Die Summe über $1/j_{1n}^2$ lässt sich aus der Relation

$$\frac{d}{dz} \frac{J_y'(z)}{J_y(z)} = -\frac{y}{z^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2 + j_{yn}^2}{(z^2 - j_{yn}^2)^2} \quad (24)$$

ableiten. Führt man nämlich die Differentiation aus und geht zum limes $z \rightarrow 0$ über, so ergibt das

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{vn}^2} = \frac{1 - 2\nu(\nu-1)}{4(\nu+1)}, \quad (25)$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j_{1n}^2} = \frac{1}{8},$$

woraus

$$B = \frac{1}{2}$$

folgt, also

$$p^2 = \frac{1}{2} + \psi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{1n}p)}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n})}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (26)$$

Dieses Resultat kann jetzt in Gl. (17) eingesetzt werden. Fasst man alle Terme, die mit $J_0(j_{1n}p)$ multipliziert werden, zusammen, so erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n j_{1n} \cosh j_{1n} \xi_0 - \frac{16 a \kappa_0^3}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n})} \right\} J_0(j_{1n}p) - 2 a \kappa_0^3 + 2 A = 0. \quad (27)$$

Die Koeffizienten von $J_0(j_{1n}p)$ müssen separat verschwinden, woraus folgende Konstanten resultieren:

$$A = a \kappa_0^3$$

$$A_n = \frac{16 a \kappa_0^3}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \xi_0}. \quad (28)$$

Damit wird das Vektorpotential, Gl. (16), unter Benutzung der Definition von a , Gl. (9),

$$A(p, \xi) = \mu \sqrt{\frac{b}{\mu_0}} \omega_0 p_{1n} \kappa_0^3 \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n}p) \cosh j_{1n} \xi}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \xi_0} - \frac{1}{8} p(p^2 - 1) \right\}. \quad (29)$$

Das Magnetfeld

Die beiden Komponenten des Magnetfeldes gehen durch

$$B_r(\rho, \tau) = -\frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial A(\rho, \tau)}{\partial \tau}$$

$$B_z(\rho, \tau) = \frac{1}{\kappa_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A(\rho, \tau) \quad (30)$$

aus dem Vektorpotential hervor. Nach Ausführung der Differentiationen ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$B_r(\rho, \tau) = -2\mu \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \omega_0 \rho \kappa_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n} \rho) \sinh j_{1n} \tau}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \tau_0} \quad (31)$$

$$B_z(\rho, \tau) = \mu \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \omega_0 \rho \kappa_0^2 \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_{1n} \rho) \cosh j_{1n} \tau}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \tau_0} - \frac{1}{2} \left(\rho^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \right\}. \quad (32)$$

Die Feldlinien

Da die Feldlinien überall parallel zu $\vec{B}$ sein müssen, erfüllt ein Linienelement $d\vec{s}$ die Gleichung

$$d\vec{s} \times \vec{B} = 0. \quad (33)$$

In unserem Falle ist

$$d\vec{s} = \hat{e}_r \kappa_0 d\rho + \hat{e}_z \kappa_0 d\tau$$

$$\vec{B} = \hat{e}_r B_r + \hat{e}_z B_z = -\hat{e}_r \frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial A}{\partial \tau} + \hat{e}_z \frac{1}{\kappa_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A, \quad (34)$$

($\hat{e}_r, \hat{e}_z$ = Einheitsvektoren). Das Vektorprodukt von Gl. (33) ist daher

$$d\vec{s} \times \vec{B} = -\hat{e}_\varphi \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho A d\rho + \frac{\partial A}{\partial \tau} d\tau \right) = 0.$$

Multipliziert man durch mit ρ so ist

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \rho A(\rho, \tau) d\rho + \frac{\partial}{\partial \tau} \rho A(\rho, \tau) d\tau = d[\rho A(\rho, \tau)] = 0$$

oder

$$\rho A(\rho, \tau) = K \quad (\text{eine Konstante}) \quad (35)$$

die Gleichung der Feldlinien. Voll ausgeschrieben ist das

$$\rho \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n}\rho) \cosh j_{1n}\tau}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n}\tau_0} - \frac{1}{8} \rho(\rho^2 - 1) \right\} = K. \quad (36)$$

Die Lösung dieser hochgradig transzendenten Gleichung kann nur numerisch erfolgen. Nur für $K=0$ können die Feldlinien direkt aus Gl. (36) bestimmt werden. Bei $K=0$ ist eine Feldlinie offensichtlich $\rho=0$, d.h. die zentrale Achse fällt mit einer Feldlinie zusammen. Eine zweite Feldlinie ist $\tau=\tau_0$, d.h. die Oberfläche der Scheibe. Das kann man folgendermassen erkennen: Wenn $\tau=\tau_0$ ist, wird aus dem Ausdruck in geschweiften Klammern, Gl. (36),

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n}\rho)}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n})} - \frac{1}{8} (\rho^3 - \rho). \quad (37)$$

ρ^3 und ρ können nach $J_1(j_{1n}\rho)$ entwickelt werden, da diese ein vollständiges orthogonales Funktionensystem im Bereich $0 \leq \rho < 1$ bilden. Den Punkt $\rho=1$ brauchen wir im Moment nicht. Das Ergebnis der Entwicklung ist

$$\begin{aligned} \rho^3 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 - j_{1n}^2}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n})} J_1(j_{1n}\rho) \\ \rho &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n}\rho)}{j_{1n} J_0(j_{1n})} \end{aligned} \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (38)$$

also

$$\frac{1}{8} (\rho^3 - \rho) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_{1n}\rho)}{j_{1n}^3 J_0(j_{1n})} \quad (39)$$

Der zweite Term in Gl. (37) hebt sich daher mit dem ersten weg, so dass $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$ tatsächlich eine Feldlinie ist. Die dritte Feldlinie bei $K=0$ ist $\rho=1$, wie leicht aus Gl. (36) zu erkennen ist, da ja per definitionem $J_1(j_{1n})=0$ ist. Der Verlauf des Feldes bei $\rho=1$ ist entgegengesetzt zu dem bei $\rho=0$, ähnlich wie im Fall der Kugel, so dass auch bei der Scheibe ein Kreis in der Ebene $z=0$ existieren muss, auf dem $\vec{B}$ verschwindet.

Die Feldlinie bei $K=0$ demonstriert das bereits erwähnte Resultat, dass die Oberfläche eines Körpers mit unendlicher Permeabilität immer mit einer Feldlinie zusammenfällt. Das ist ein zumindest notwendiger Beweis für die Richtigkeit der vorliegenden Berechnung.

Das axiale Magnetfeld $B_z(\rho, \mathfrak{r})$

Die axiale Komponente des Magnetfeldes, Gl. (32), ist bestimmt die interessantere der beiden Felder. Mit den gleichen Werten, die für die Kugel genommen wurden ($\mu/\mu_0=1000$, $B_H=2,79526 \times 10^{-26}$ m/kg, $\omega_0=2\pi \cdot 800$ rad/s, $\rho_m=5000$ kg/m³, $r_0=0,1$ m) ist

$$\mu \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \omega_0 \rho_m r_0^2 = 4,7110 \times 10^{-4} \text{ Gauss}.$$

Die axialen Felder bei $\rho=0$ und $\rho=1$ sind dann

$$B_z(0, \mathfrak{r}) = 4,7110 \times 10^{-4} \left\{ \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh j_{1n} \mathfrak{r}}{j_{1n}^2 J_0(j_{1n}) \cosh j_{1n} \mathfrak{r}_0} \right\} \text{ Gauss} \quad (40a)$$

$$B_z(1, \mathfrak{r}) = -4,7110 \times 10^{-4} \left\{ \frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh j_{1n} \mathfrak{r}}{j_{1n}^2 \cosh j_{1n} \mathfrak{r}_0} \right\} \text{ Gauss.} \quad (40b)$$

Der Verlauf der beiden Komponenten für $\mathfrak{r}_0=0,5$ ist in Fig. 2 dargestellt. In der gleichen Figur ist auch die Kurve des Magnetfeldes entlang der Rotationsachse der Kugel ($\theta=0$) eingezeichnet. Mit der Variablentransformation $\rho \rightarrow \mathfrak{r}$ ergibt sich für diese Kurve

$$\text{Kugel:} \quad B_z^-(0, \mathfrak{r}) = 0,9422 \times 10^{-4} (1 - \mathfrak{r}^2) \text{ Gauss} \quad (41)$$

$$0 \leq \mathfrak{r} \leq 1 \quad (\mathfrak{r} = \frac{r}{r_0}).$$

Die Distanz $0 \leq \rho \leq 1$ wurde in der Figur auf die Hälfte reduziert um sie der nur halb so dicken Scheibe anzupassen.

Ein Vergleich von $B_z(1, \vartheta)$ der Scheibe mit dem tangentialen Feld B_2^- der Kugel ist nur an deren Äquator, $(r_0, \frac{\pi}{2})$, möglich. Das Äquatorialfeld der Kugel, $-B_2^-(r_0, \frac{\pi}{2})$, ist $-0,9422 \times 10^{-4}$ Gauss, also gleich gross wie Gl. (41) bei $\vartheta=0$, während das entsprechende Feld der Scheibe im Punkt $(1,0)$, $B_z(1,0) = -0,9801 \times 10^{-4}$ Gauss ist (vergl. Fig. 2).

Die Differenz zwischen den Feldern im Zentrum der Kugel, $0,9422 \times 10^{-4}$ Gauss und der Scheibe, $0,7523 \times 10^{-4}$ Gauss, ist zum Teil darauf zurückzuführen, dass die Scheibe nur 0,1 m dick ist, im Gegensatz zur Kugel, deren Durchmesser 0,2 m ist. Wäre die Scheibe 0,14 m dick, wären die beiden Felder gleich. Je höher der Zylinder, umso stärker wird das zentrale Feld. Im Grenzfall $h \rightarrow \infty$ hat das Magnetfeld die Form

$$\begin{aligned} l = \infty: \quad B_z(\rho) &= \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \omega_0 r_0^2 (1 - \rho^2) \\ &= 2,3555 \times 10^{-4} (1 - \rho^2) \quad \text{Gauss.} \end{aligned} \quad (42)$$

Die Feldstärke auf der Achse beträgt jetzt $2,3555 \times 10^{-4}$ Gauss oder rund dreimal so viel wie bei der Scheibe mit $h=0,05$ m. Man könnte diesen Effekt ausnutzen und evtl. nur einen langen Stab mit hohem μ/μ_0 rotieren lassen. Gleichung (42) bei $\rho=0$ lässt sich auch so schreiben:

$$\begin{aligned} B_z(0) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \omega_0 r_0^2 \\ &= 4,6862 \times 10^{-9} \frac{\mu}{\mu_0} \omega_0 r_0^2 \quad \text{Gauss.} \end{aligned} \quad (43)$$

Mit $\frac{\mu}{\mu_0} = 3 \times 10^4$, $\omega_0 = 2\pi \cdot 1000$ rad/s braucht r_0 nur 1,84 cm zu sein um ein Feld von 3×10^{-4} Gauss zu erreichen, das viermal so stark wäre wie das Feld der rotierenden Scheibe.

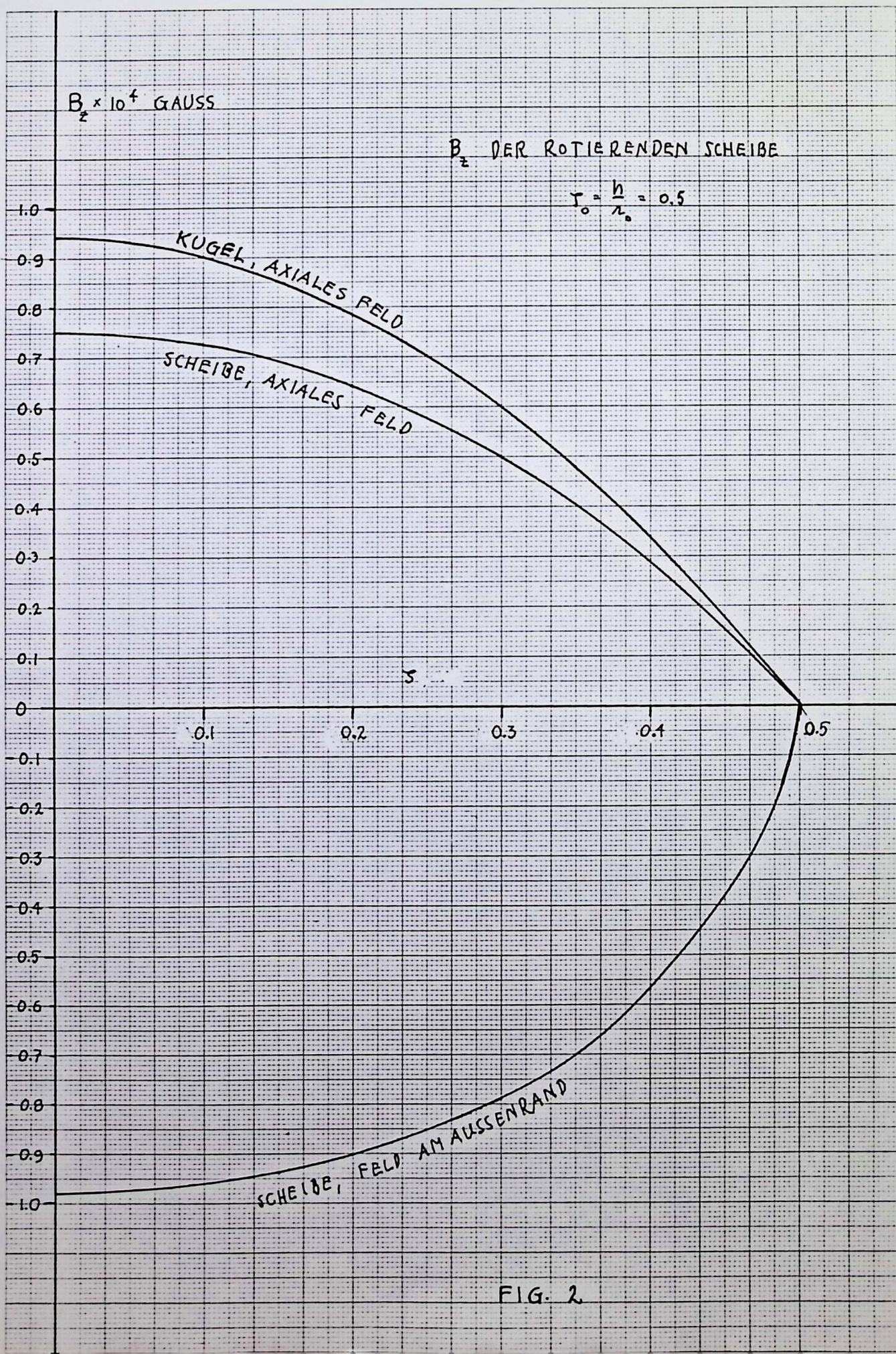


FIG. 2

Abschätzung der Zentrifugal- und Oberflächenladungseffekte

1) Abschätzung ohne thermischen Effekt

Durch den Zentrifugaleffekt werden die Elektronen im Leitungsband nach aussen gedrängt, wodurch sich im Inneren der Scheibe eine positive Raumladung bildet. Die verdrängten Elektronen sammeln sich an der Oberfläche, so dass dort eine negative Oberflächenladung auftritt. Durch die thermische Bewegung wird die Oberflächenladung verschmiert, bleibt aber praktisch auf eine ganz dünne Schicht an der Oberfläche beschränkt.

Ohne den thermischen Effekt würde die Oberflächenladung kein elektrisches Feld im Inneren erzeugen. Die Elektronen müssten daher unter dem Einfluss des von der positiven Raumladung allein erzeugten Feldes einerseits und der Zentrifugalkraft andererseits im Gleichgewicht gehalten werden, also

$$\begin{aligned} e E(r) &= m \omega_0^2 r \\ E(r) &= \frac{m \omega_0^2}{e} r. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Raumladung $\rho_R(r)$ ist gegeben durch

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_R(r)$$

oder, in Zylindergeometrie,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_R(r). \quad (2)$$

Mit Gl. (1) für $E(r)$ ist die Raumladung daher

$$\rho_R(r) = \frac{2 m \omega_0^2 \epsilon_0}{e} \quad (\text{konstant}). \quad (3)$$

Die gesamte verdrängte Ladung muss an der Oberfläche wieder zum Vorschein kommen. Diese Ladung ist

$$q = - 2\pi \int_0^{r_0} \rho_R(r) r dr = - \frac{2\pi m \omega_0^2 \epsilon_0 r_0^2}{e}. \quad (4)$$

Daraus ergibt sich eine Oberflächenladung σ_0 von

$$\sigma_0(r_0) = \frac{q}{2\pi r_0} = - \frac{m \omega_0^2 \epsilon_0 r_0}{e} . \quad (5)$$

Die gesamte Ladung ohne thermischen Effekt ist daher

$$\rho(r) = \frac{2m\omega_0^2 \epsilon_0}{e} \left[1 - \frac{r_0}{r} \delta(r-r_0) \right] . \quad (6)$$

(Die δ -Funktion hat die Dimension $1/r$).

2) Abschätzung unter Berücksichtigung des thermischen Effekts

Der erste Term in Gl(6) ist unabhängig von der thermischen Bewegung der Elektronen, aber der zweite wird von der Thermik leicht verbreitert. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, schreiben wir

$$\rho_T(r) = e \left(n - n e^{\frac{e\phi(r)}{kT}} \right) , \quad (7)$$

wobei n die positive Ladungsdichte und gleichzeitig die Maxwell-gemittelte Dichte der Leitungselektronen im ungestörten Zustand ist. Der erste Term in Gl. (7) beschreibt daher die positive Ladungsdichte, während der zweite die Dichte der Elektronen beschreibt, die unter dem Einfluss eines Potentials $\phi(r)$ stehen. Da angenommen werden kann, dass $e\phi \ll kT$ ist, lässt sich Gl. (7) entwickeln,

$$\rho_T(r) \approx e \left[n - n \left(1 + \frac{e\phi}{kT} \right) \right] = - \frac{\epsilon_0}{\lambda^2} \phi(r) \quad (8)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{ne^2}} .$$

λ ist der Debyeradius der Elektronen.

Um $\phi(r)$ zu berechnen benutzen wir die Poissonsche Gleichung,

$$\nabla^2 \phi = - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) \quad (9)$$

und erhalten in Zylindergeometrie und nach Einsetzen von Gl. (8)

in Gl. (9)

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{\lambda^2} \phi(r) = 0. \quad (10)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\phi(r) = A I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (11)$$

I_0 ist eine Besselfunktion zweiter Art und A ist eine Integrationskonstante. Gleichung (11) in Gl. (8) eingesetzt ergibt

$$\rho_T(r) = -\frac{\epsilon_0}{\lambda^2} A I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (12)$$

Zusammen mit dem ersten Term aus Gl. (6) erhält man für die Ladungsdichte mit thermischem Effekt

$$\rho(r) = \frac{2m\omega_0^2 \epsilon_0}{e} - \frac{\epsilon_0}{\lambda^2} A I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (13)$$

Die Gesamtladung muss verschwinden, da das Material ja ursprünglich neutral war, also

$$\int_0^{r_0} \rho(r) r dr = \frac{m\omega_0^2 \epsilon_0 r_0^2}{e} - \epsilon_0 \frac{r_0}{\lambda} A I_1\left(\frac{r_0}{\lambda}\right) = 0. \quad (14)$$

Hieraus bestimmt sich A zu

$$A = \frac{m\omega_0^2 r_0 \lambda}{e I_1\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)}, \quad (15)$$

womit die Ladungsdichte, Gl. (13), schliesslich

$$\rho(r) = \frac{2m\omega_0^2 \epsilon_0}{e} \left[1 - \frac{r_0}{2\lambda} \frac{I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)} \right] \quad (16)$$

wird.

Der zweite Term in Gl. (16) ist praktisch nur an der Oberfläche von Null verschieden. Das erkennt man am besten, wenn man Zahlen einsetzt:

$$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ Coul}^2 \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$$

$$k = 1,38062 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$n \cong 10^{29} \text{ m}^{-3} \text{ (wenn jedes Fe-Atom ein Leitungselektron beisteuert)}$$

$$e = 1,6020 \times 10^{-19} \text{ Coul}$$

$$T = 293 \text{ K.}$$

Mit diesen Werten findet man

$$\frac{1}{\lambda} \approx 2,7 \times 10^{11} \text{ m}^{-1}.$$

Der zweite Term in Gl. (16) ist daher verschwindend klein, ausser wenn $r \approx r_0$ ist. Das wird besonders deutlich, wenn beide Besselfunktionen durch ihre asymptotischen Ausdrücke ersetzt werden, denn dann lässt sich die Ladungsdichte in der Form

$$\rho(r) \approx \frac{2m\omega_0^2 \epsilon_0}{e} \left(1 - \frac{r_0}{2\lambda} e^{-\frac{r_0 - r}{\lambda}} \right) \quad (17)$$

schreiben. Der zweite Term hat deutlich den Charakter einer δ -Funktion wie in Gl. (6).

Mit Gl. (11) für $\phi(r)$ und Gl. (15) für A lässt sich auch der Exponent in Gl. (7) berechnen. Der Wert im Maximum bei $r=r_0$ ergibt sich zu $2,125 \times 10^{-15}$, was die Entwicklung in Gl. (8) rechtfertigt.

Die Stromdichte ist $v\rho(r) = \omega_0 r \rho(r)$ oder

$$j(r) = \frac{2m\omega_0^3 \epsilon_0}{e} \left[r - \frac{r_0}{2\lambda} r \frac{I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)} \right]. \quad (18)$$

3) Die Magnetfelder

Um das zentrifugale mit dem gravitativen Magnetfeld zu vergleichen genügt es, beide Felder für einen rotierenden Zylinder von unendlicher Länge zu berechnen. Das vereinfacht die Rechnung sehr stark, und da nur Verhältnisse gesucht werden, sollte diese Approximation zuverlässige Resultate liefern, besonders wenn die Verhältnisse sehr viel kleiner oder grösser als 1 sind.

Im Falle des unendlichen Zylinders verschwindet das äussere Feld auch ohne die Annahme einer unendlichen Permeabilität. Im Inneren ist das Feld unabhängig von z und durch die einfache Formel

$$B(r) = \mu \int_r^{r_0} j(r) dr \quad (19)$$

gegeben.

3.1. Das gravitative Feld

Nach Gl. (2) im Bericht über die rotierende Scheibe ist die gravitative Stromdichte

$$j_G(r) = \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \omega_0 r. \quad (20)$$

Nach Gl. (19) ergibt sich damit für das gravitative Magnetfeld

$$B_G(r) = \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \rho_m \omega_0 r_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right). \quad (21)$$

3.2. Das zentrifugale Magnetfeld

In diesem Fall ist die Stromdichte in Gl. (18) angegeben. Eingesetzt in Gl. (19) und integriert ergibt sich daraus folgendes Magnetfeld:

$$B_{\text{zent.}}(r) = - \frac{\mu \omega_0^2 \epsilon_0 r_0^2}{c} \left[\frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r}{r_0} \frac{I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)} \right]. \quad (22)$$

3.3. Das Magnetfeld einer beliebigen Oberflächenladung

Wenn der Zylinder eine zusätzliche Oberflächenladung $-\sigma$ Coul/m² trägt, ist der zugehörige Oberflächenstrom

$$j_0(r) = -\sigma_0 \omega_0 r_0 \delta(r-r_0). \quad (23)$$

Das entsprechende Magnetfeld ist daher

$$B_0 = -\mu \sigma_0 \omega_0 r_0. \quad (24)$$

4.) Numerischer Vergleich

Das gravitative Magnetfeld nach Gl. (21) mit den üblichen Konstanten ($\mu/\mu_0=1000$) ist

$$B_G(r) = 2,3555 \times 10^{-4} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \text{ Gauss.} \quad (25)$$

Dies entspricht auch dem Feld in Gl. (42) des Berichts über die rotierende Scheibe. Das Feld hat sein Maximum auf der Achse und fällt stetig nach r_0 hin gegen 0 ab.

Das durch die Zentrifugalkraft erzeugte Feld ist ($m=9,1066 \times 10^{-31} \text{ kg}$)

$$B_{\text{zent}}(r) = -8,036 \times 10^{-13} \left[\frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r}{r_0} \frac{I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_1\left(\frac{r_0}{\lambda}\right)} \right] \text{ Gauss.} \quad (26)$$

Das Feld verschwindet auf der Achse und steigt mit zunehmendem r stetig an bis fast $r=r_0$. Innerhalb einer Distanz von ungefähr $\lambda = 3,7 \times 10^{-12} \text{ m}$ von der Oberfläche wird der zweite Term wirksam und B_{zent} fällt auf 0 bei $r=r_0$. Gl.(6) ergibt nur den $\frac{r^2}{r_0^2}$ -Term von Gl.(26).

Das Feld einer Oberflächenladung ist konstant und gleich

$$B_0 = -6,3184 \times 10^{-3} \sigma_0 \text{ Gauss.} \quad (27)$$

Bei einer Oberflächenladung von $\sigma_0 = -80 \times 10^{-12} \text{ Coul/m}^2$ ist

$$B_0 = -5,0547 \times 10^{-7} \text{ Gauss.} \quad (28)$$

Man erkennt aus einem Vergleich dieser Werte, dass sowohl der Zentrifugaleffekt wie auch die zu erwartende Oberflächenladung Magnetfelder hervorrufen, die praktisch überall wesentlich schwächer sind als das gravitative Magnetfeld.

Bemerkungen zum Feld einer rotierenden Scheibe mit hochpermeabler Achse

Der Einfachheit halber soll eine unendlich lange Achse angenommen werden. Ein Schnitt durch das System ist in Fig. 1 dargestellt. Aus Gründen der Randbedingungen muss das System

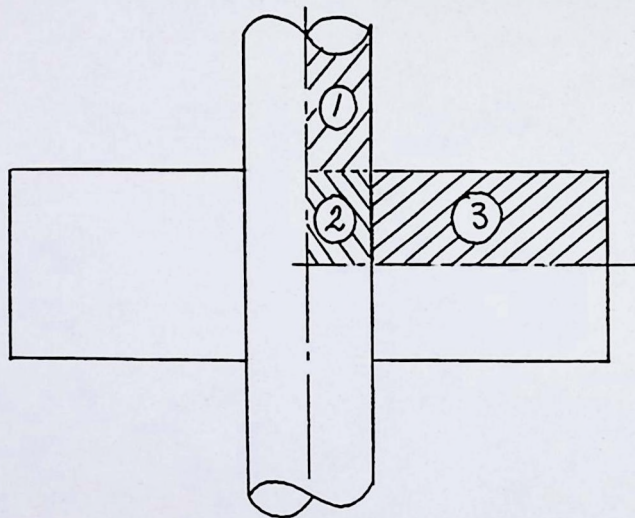


Fig. 1

in 3 Zonen unterteilt werden, doch bestehen Zone (1) und (2) aus dem gleichen (hochpermeablen) Material. Es geht nicht darum, die Felder in den 3 Zonen zu berechnen, sondern nur um das Verhalten der Lösung in der Achse, Zone (1), für grosse z .

Zone (1) entspricht einer langgestreckten "Scheibe", so dass das Vektorpotential des gravitativen Magnetfeldes ganz ähnlich demjenigen der rotierenden Scheibe ist (Gl. (10) im Bericht vom 21.7.1983). Die einzige Modifikation, die vorgenommen werden muss, ist das Ersetzen von $\cosh c_n z$ durch $e^{-c_n z}$, da das Feld für $z \rightarrow \infty$ endlich bleiben muss. Damit wird das Vektorpotential

$$\text{Zone (1): } A^{(1)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(c_n r) e^{-c_n z} - \alpha z^3 + A z. \quad (1)$$

Die entsprechenden Magnetfelder sind

$$B_r^{(1)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n J_1(c_n r) e^{-c_n z} \quad (2)$$

$$B_z^{(1)}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n J_0(c_n r) e^{-c_n z} + 2A - 3\alpha z. \quad (3)$$

Die Randbedingungen verlangen, dass $B_r^{(1)}$ am Rand $r=r_0$ verschwindet, so dass, wie im Fall der Scheibe,

$$c_n = \frac{j_{1n}}{r_0}$$

sein muss. Ausserdem muss $B_z^{(1)}$ für grosse z gegen das Feld eines unendlich langen rotierenden Stabes streben, also

$z \rightarrow \infty$: $B_z^{(1)}(r, z) \rightarrow 2A - 4ar^2 = \text{Feld eines unendlich langen rotierenden Zylinders.}$

In diesem Fall kann die allgemeine Randbedingung zum Vakuum erfüllt werden, d.h. $\frac{1}{\mu} B_z(r)$ muss bei $r=r_0$ stetig sein. Da wir aber wissen, dass das Feld eines unendlichen Stabes im Vakuum verschwindet, muss $B_z(r_0) = 0$ sein, oder

$$2A - 4ar_0^2 = 0, \quad A = 2ar_0^2 \quad (4)$$

und

$$B_z^{(1)}(r, z) = \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} A_n J_0(j_{1n} \frac{r}{r_0}) e^{-j_{1n} \frac{z}{r_0}} + 4a(r_0^2 - r^2). \quad (5)$$

Der Summenterm in dieser Gleichung beschreibt den Einfluss der Scheibe auf das Magnetfeld im Stab. Dieser Einfluss klingt offensichtlich wie

$$e^{-j_{11} \frac{z}{r_0}} = e^{-3.8317 \frac{z}{r_0}}, \quad (j_{11} < j_{12} < \dots)$$

ab. Wenn z/r_0 am Ort der Messung von der Grössenordnung 10 ist, spürt man praktisch nichts mehr vom Vorhandensein der Scheibe, so dass man die Achse gerade so gut allein rotieren lassen kann. Das entsprechende Magnetfeld $4a(r_0^2 - r^2)$, voll ausgeschrieben, ist

$$B_z^{(1)}(r) = \frac{\mu}{2\mu_0} \sqrt{\beta\mu_0} \rho_{\omega} \omega_0 (r_0^2 - r^2) \quad (6)$$

(vergl. auch Gl. (21) im Bericht vom 27.7.1983).

Die induktive Erzeugung eines Gravitationsfeldes

Im stationären Fall und unter Vernachlässigung des Mesofeldes $\vec{\mu}$ beschreibt Gl. (46.6) im Bericht vom 2.2.1984 die Induktion eines Magnetfeldes $\vec{H}$ durch einen Massenstrom $\vec{j}_m$,

$$\nabla \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \vec{j}_m$$

oder

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \vec{j}_m . \quad (1)$$

Diese Gleichung wurde zur Berechnung des Magnetfeldes einer rotierenden Scheibe verwendet. Die "Umkehrung" der Relation, d.h. die Induktion eines Gravitationsfeldes $\vec{T}$ durch ein Magnetfeld $\vec{B}$, erfolgt in Gl. (46.3) des gleichen Berichts,

$$\nabla \times (\sqrt{\epsilon_0} \vec{E} + \frac{c}{\omega} \sqrt{\alpha} \vec{T}) = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\mu_0} \vec{H} + \sqrt{\beta} \vec{\mu}) . \quad (2)$$

Das Mesofeld $\vec{\mu}$ kann voraussichtlich vernachlässigt werden, da es mit dem Faktor $\sqrt{\beta}$ multipliziert wird, der um 10 Grössenordnungen kleiner als $\sqrt{\mu_0}$ ist. Multipliziert man sodann durch mit $\sqrt{\mu_0}$ und benutzt die Relationen

$$\sqrt{\epsilon_0} \mu_0 = \frac{1}{c} , \quad \sqrt{\alpha \beta} = \frac{1}{\omega} , \quad \omega = \frac{4}{3} c , \quad (3)$$

so entsteht die Gleichung

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon_0}} \vec{T}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (4)$$

Dies ist gewissermassen die Umkehr^{unr} von Gl. (1), doch lässt sie sich, verglichen mit letzterer, experimentell wesentlich schwerer verifizieren. Gleichung (4) zeigt deutlich, dass ein stationäres Gravitationsfeld $\vec{T}$ nicht auf induktivem Wege aufgebaut werden kann. Das gleiche gilt auch für das mit $\vec{T}$ gekoppelte elektrische Feld. Stationäre elektrische und gravitative Felder lassen sich nur durch elektrische Ladungen, bzw. ponderable Massen erzeugen.

Das induzierte Gravitationsfeld muss daher durch ein zeitabhängiges Magnetfeld hervorgerufen werden und ist natürlich selber zeitabhängig. Ausserdem ist es immer von einem ebenfalls zeitabhängigen elektrischen Feld begleitet, das, wie die Erfahrung lehrt, um viele Grössenordnungen stärker sein muss. Wenn in erster Näherung angenommen wird, dass die beiden Faktoren auf der linken Seite von Gl. (4) gleich gross sind, so wäre das induzierte Gravitationsfeld

$$\vec{T} \sim \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \vec{E} = 2,7 \times 10^{-10} \vec{E},$$

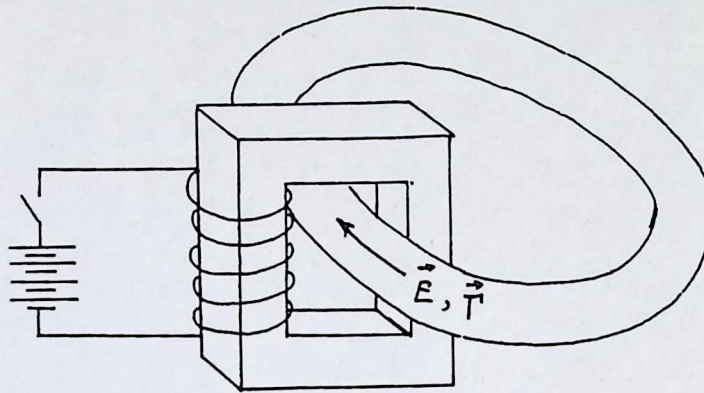
was natürlich mit der Kleinheit der Gravitationskonstante γ zusammenhängt. Die Messung eines so schwachen Gravitationsfeldes in Anwesenheit eines um schätzungsweise 10 Grössenordnungen stärkeren elektrischen Störfeldes dürfte sich als schwierig erweisen.

Über die tatsächliche Grösse von $\vec{T}$ geben die Heimschen Gleichungen keinen Aufschluss, weil $\vec{T}$ nicht separat berechenbar ist. Das gleiche gilt auch für die anderen Felder. Die Art und Weise in der die Feldgleichungen abgeleitet werden bietet auch keine Möglichkeit zusätzliche Relationen aufzufinden, die eine getrennte Berechnung aller 4 Felder ermöglichen würden. Eine solche Trennung der Felder müsste wahrscheinlich auf ganz anderen Überlegungen beruhen, und es wäre daher sehr wünschenswert Herrn Heim zu fragen, ob er noch andere Beziehungen kennt, die es gestatten würden, die 4 gekoppelten Felder seiner Gleichungen separat zu bestimmen.

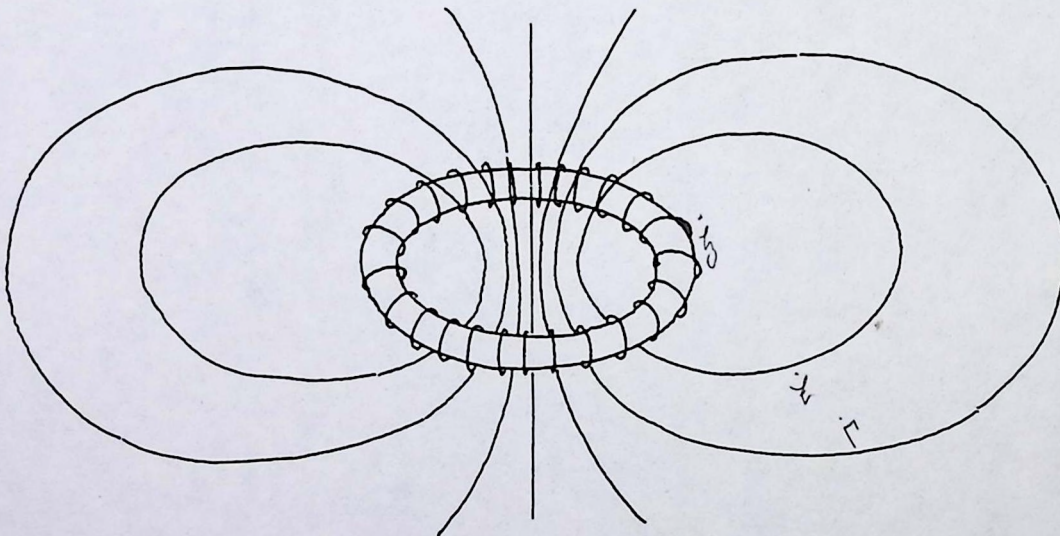
Obwohl die Gleichungen keine Aussage über die Grösse von $\vec{T}$ machen, zeigen sie doch, dass die Feldlinien von $\vec{E}$ und $\vec{T}$ parallel zueinander verlaufen. Die sehr gut bekannten Lösungen von Gl. (4) ohne $\vec{T}$ bestimmen also gleichzeitig auch den Verlauf der gravitativen Feldlinien. Besteht z.B. ein oszillierendes Magnetfeld in einem zylindrischen Eisenkern, so bilden die Feldlinien der induzierten elektrischen und gravitativen Felder konzentrische Kreise um den Kern.

In Tokamaks wird ein starker Stromstoss durch eine Magnet-spule geschickt, der ein schnell anwachsendes, sehr starkes Magnetfeld in einem die Plasmaröhre umgebenden Eisenjoch erzeugt. Im Innern der Röhre wird dadurch ein starkes toroidales elektrisches

Feld aufgebaut, das die Elektronen beschleunigt, die ihrerseits das Plasma erhitzen, Fig. 1. Bei dieser sogn. Ohmschen Aufheizung muss also stets auch ein toroidales Gravitationsfeld entstehen.



Eine ringförmige Magnetspule würde sowohl ein elektrisches wie ein gravitatives Dipolfeld erzeugen, Fig. 2.



Elektromagnetische Wellen werden immer auch von gravitativen Wellen begleitet. Die Wellengleichung lässt sich am leichtesten aus Gl. (45) im Bericht vom 2.2.1984 ableiten. Dazu wird die Rotation von Gl. (45.2) gebildet und für $\nabla \times \vec{G}$ aus Gl. (45.4) eingesetzt. Benutzt man noch die Vektoridentität

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{G}) - \nabla^2 \vec{G}$$

und setzt für $\nabla \cdot \vec{G}$ Gl. (45.1) ein, so erhält man die Wellengleichung

in der Form

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{G} + c \nabla \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Voll ausgeschrieben und unter Benutzung von Gl. (3) wird daraus

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_e + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_e}{\partial t} + \frac{1}{\omega^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \frac{\partial^2 \vec{I}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \nabla^2 \vec{I} + \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \nabla \rho_m + \mu_0 \sqrt{\frac{\rho}{\mu_0}} \frac{\partial \vec{j}_m}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Eine ähnliche Wellengleichung wurde bereits im Artikel von Herrn v. Ludwiger im MUFON Tagungsband von 1975 angegeben, nur ist dort das Vorzeichen von $\nabla^2 \vec{I}$ positiv, was gedämpfte Wellen zur Folge hat. Diese gedämpften Gravitationswellen entstehen auch aus Gl. (20) im Bericht vom 2.2.1984, doch gelten diese Gleichungen nur im Raum R_{+4} , mit $x^4 = \omega t$. Der kombinierte Raum R_4 ist wieder ein Minkowskiraum mit $x^4 = ict$, und daher verwandelt sich das positive Vorzeichen auf der rechten Seite von Gl. (20.2) in ein negatives Vorzeichen in Gl. (46.3). Das wiederum führt zu ungedämpften Gravitationswellen, wie sie in Gl. (6) in Erscheinung treten.

Zusammenfassend scheint es nicht schwierig zu sein gravitative Felder zu induzieren. Ihre Messung hängt aber weitgehend von der Möglichkeit ab, die gleichzeitig auftretenden starken elektromagnetischen Felder wirksam abzuschirmen oder Testteilchen zu benutzen, die von elektromagnetischen Feldern nicht beeinflusst werden.

19.12.1984

Herrn

A. Harasim

MBB Apparate

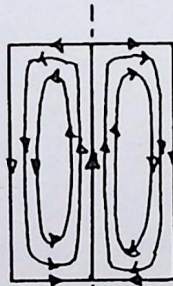
Postfach 80 11 49

D-8000 München 80

Sehr geehrter Herr Harasim,

Vielen Dank für Ihren Brief vom 5.11. und für die Kopie Ihres Zuwendungsantrags an die Deutsche Forschungsgemeinschaft. Er ist sehr klar und übersichtlich abgefasst. Es würde mich natürlich freuen, wenn er genehmigt würde, doch sollte man sich in Anbetracht der unorthodoxen Art von Heims Theorie keine allzu grossen Hoffnungen machen. Vielen Dank auch für den mir zugedachten Betrag; ich bin sehr gespannt, wie sich die Dinge entwickeln werden. Übrigens hat sich auf Seite 11 des Antrags ein kleiner Fehler eingeschlichen: In Formel 4 sollte auf der rechten Seite $\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\alpha} \vec{I}$ stehen.

Ihre Bemerkungen zum Grenzfall von Gl. (32) im Bericht vom 21.7. 1983 sind durchaus berechtigt. Es besteht tatsächlich eine Diskrepanz zwischen dem Grenzfall eines unendlich langen Zylinders, wie er einerseits durch Gl. (32) und andererseits durch Gl. (42) dargestellt wird. Der Grund hierfür ist wie folgt: Bei der Ableitung von Gl. (32) wird angenommen, dass der endliche Zylinder eine unendliche Permeabilität hat. Daraus ergibt sich, dass die äussere Kontour der Scheibe eine Feldlinie ist. Da eine Feldlinie durch die Zentralachse der Scheibe geht und alle Feldlinien wegen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ geschlossen sein müssen, muss $\vec{B}$ bei $\varphi = 1$ in der entgegengesetzten Richtung von $\vec{B}$ bei $\varphi = 0$ verlaufen. Das Feld sieht also ungefähr so aus:

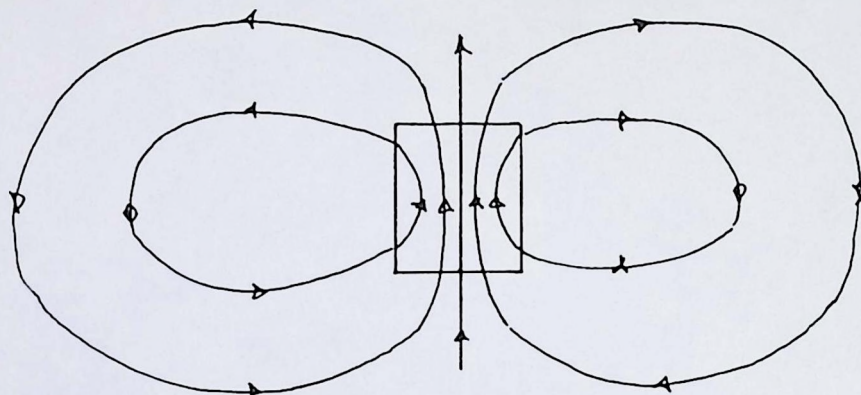


Wenn h sehr gross wird, ändert sich nichts an der Tatsache der Gegenläufigkeit, und im Grenzfall $h = \infty$ verschwindet der Summenterm wegen $\cosh j \ln \zeta_0$ und

$$h = \infty : \quad B_z(\varphi) = -\frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\mu_0}} \omega_0 \varphi_m \zeta_0^2 \left(\frac{1}{2} - \varphi^2 \right),$$

wie Sie in Ihrem Brief richtig bemerkt haben. Bei $\varphi = 0$ ist B_z nach dieser Formel positiv, bei $\varphi = 1$ hingegen negativ. B_z hat also seine Richtung geändert.

In der Ableitung von Gl. (42) ist die Randbedingung an der oberen und unteren Stirnseite vernachlässigt worden, und es wird angenommen, dass $\vec{B}$ seine Richtung innerhalb des Stabes nicht ändert. Diese Annahme liegt Gl. (19) im Bericht vom 27.7.1983 zugrunde, deren Lösung Gl. (42) ist. Bei den meisten gebräuchlichen Magneten mit niedrigem μ trifft die Annahme auch zu. Zwar ist $\vec{B}$ auch in diesem Fall gegenläufig, weil sich die Feldlinien ja schliessen müssen, aber erst ausserhalb des Eisenkerns. Das Feld sieht also so aus:



Wird so ein Magnet unendlich lang gemacht, so besteht $\vec{B}$ im Innern aus geraden Linien, die alle in einer Richtung laufen, und für diesen Fall gilt Gl. (42). Es wäre richtiger gewesen, wenn ich den limes in Gl. (32) vollzogen hätte, denn dann wären Gl. (32) und Gl. (42) konsistent geblieben. Um das nachträglich zu korrigieren, lege ich Ihnen eine abgeänderte Seite 10 bei.

Im Bericht vom 27.7.1983 wird auf S. 5 und 6 die gleiche Annahme gemacht wie in Gl. (42). Streng genommen, sollte man auch hier die richtigen Randbedingungen an den Stirnflächen berücksichtigen, doch würde so etwas das Problem sehr komplizieren. Da es nur auf die relativen Grössenordnungen von B_G , B_{zent} und B_0 ankommt, ist es gerechtfertigt auf diese Komplikation zu verzichten und mit den einfacheren, wenn auch nicht ganz korrekten, Formeln zu rechnen. Ein Satz auf S. 6 muss allerdings weggelassen werden, da er sich auf die jetzt geänderte Formel (42) bezieht. Ich lege diesem Brief daher auch eine abgeänderte Seite 6 bei. Schliesslich muss auch die Abschätzung vom 24.1.1984 geändert werden, und zu diesem Zweck lege ich Ihnen eine korrigierte Seite 2 bei.

Mit Ihren Berechnungen der Summe über die Besselfunktionen und des Verlaufs von $B(0,0)$ bin ich durchaus einverstanden. Bei $r_0=0.8$ ergibt ja fast der erste Term schon den Wert -0.015 . Das Studium des Barnett Effekts habe ich schon begonnen, aber vorläufig nur sehr oberflächlich. Nach den Feiertagen werde ich diesem Problem bedeutend mehr Zeit widmen. Ich danke Ihnen in diesem Zusammenhang bestens für die Übersendung von Literaturangaben.

Zu den Festtagen wünsche ich Ihnen alles Gute und viel Erfolg im Neuen Jahr.

Mit freundlichen Grüssen

H. Aurbach

Die Randbedingungen verlangen, dass $B_r^{(1)}$ am Rand $r=r_0$ verschwindet, so dass, wie im Fall der Scheibe,

$$c_n = \frac{j_{1n}}{r_0}$$

sein muss. Ausserdem muss $B_z^{(1)}$ für grosse z gegen das Feld eines unendlich langen rotierenden Stabes streben, also

$$z \rightarrow \infty: B_z^{(1)}(r, z) \rightarrow 2A - 4ar^2 = \text{Feld eines unendlich langen rotierenden Zylinders.}$$

Das entsprechende Feld kann aus Gl. (32) im Bericht vom 21.7.1983 abgeleitet werden, indem man γ_0 gegen unendlich streben lässt, wodurch der Summenterm verschwindet und $B_z(r)$ den Wert

$$\gamma_0 \rightarrow \infty: B_z(r) = 4a\left(\frac{r_0^2}{2} - r^2\right) \quad (4)$$

annimmt. Folglich ist

$$B_z^{(1)}(r, z) = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{n=1}^{\infty} j_{1n} A_n J_0(j_{1n} \frac{r}{\lambda_0}) e^{-j_{1n} \frac{z}{\lambda_0}} + 4a\left(\frac{\lambda_0^2}{2} - r^2\right). \quad (5)$$

Der Summenterm in dieser Gleichung beschreibt den Einfluss der Scheibe auf das Magnetfeld im Stab. Dieser Einfluss klingt offensichtlich wie

$$e^{-j_{11} \frac{z}{r_0}} = e^{-3.8317 \frac{z}{r_0}}, \quad (j_{11} < j_{12} < \dots)$$

ab. Wenn z/r_0 am Ort der Messung von der Grössenordnung 10 ist, spürt man praktisch nichts mehr vom Vorhandensein der Scheibe, so dass man die Achse gerade so gut allein rotieren lassen kann. Das entsprechende Magnetfeld nach Gl. (4), voll ausgeschrieben ist

$$B_z^{(1)}(r) = \frac{\mu}{2\mu_0} \sqrt{\rho \mu_0} \int_{\omega} \omega_0 \left(\frac{\lambda_0^2}{2} - r^2 \right). \quad (6)$$

4.) Numerischer Vergleich

Das gravitative Magnetfeld nach Gl. (21) mit den üblichen Konstanten ($\mu/\mu_0=1000$) ist

$$B_G(\lambda) = 2,3555 \times 10^{-4} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) \text{ Gauss.} \quad (25)$$

Das Feld hat sein Maximum auf der Achse und fällt stetig nach r_0 hin gegen 0 ab.

Das durch die Zentrifugalkraft erzeugte Feld ist ($m=9,1066 \times 10^{-31} \text{ kg}$)

$$B_{\text{zent}}(\lambda) = -8,036 \times 10^{-13} \left[\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} - \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{I_1\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}{I_1\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0}\right)} \right] \text{ Gauss.} \quad (26)$$

Das Feld verschwindet auf der Achse und steigt mit zunehmendem r stetig an bis fast $r=r_0$. Innerhalb einer Distanz von ungefähr $\lambda = 3,7 \times 10^{-12} \text{ m}$ von der Oberfläche wird der zweite Term wirksam und B_{zent} fällt auf 0 bei $r=r_0$. Gl.(6) ergibt nur den $\frac{r}{r_0}$ -Term von Gl.(26).

Das Feld einer Oberflächenladung ist konstant und gleich

$$B_0 = -6,3184 \times 10^{-3} \sigma_0 \text{ Gauss.} \quad (27)$$

Bei einer Oberflächenladung von $\sigma_0 = -80 \times 10^{-12} \text{ Coul/m}^2$ ist

$$B_0 = -5,0547 \times 10^{-7} \text{ Gauss.} \quad (28)$$

Man erkennt aus einem Vergleich dieser Werte, dass sowohl der Zentrifugaleffekt wie auch die zu erwartende Oberflächenladung Magnetfelder hervorrufen, die praktisch überall wesentlich schwächer sind als das gravitative Magnetfeld.

Die Distanz $0 \leq \rho \leq 1$ wurde in der Figur auf die Hälfte reduziert um sie der nur halb so dicken Scheibe anzupassen.

Ein Vergleich von $B_z(1, \frac{1}{2})$ der Scheibe mit dem tangentialen Feld B_2^- der Kugel ist nur an deren Äquator, $(r_0, \frac{\pi}{2})$, möglich. Das Äquatorialfeld der Kugel, $-B_2^-(r_0, \frac{\pi}{2})$, ist $-0,9422 \times 10^{-4}$ Gauss, also gleich gross wie Gl. (41) bei $\beta=0$, während das entsprechende Feld der Scheibe im Punkt $(1,0)$, $B_z(1,0) = -0,9801 \times 10^{-4}$ Gauss ist (vergl. Fig. 2).

Die Differenz zwischen den Feldern im Zentrum der Kugel, $0,9422 \times 10^{-4}$ Gauss und der Scheibe, $0,7528 \times 10^{-4}$ Gauss, ist zum Teil darauf zurückzuführen, dass die Scheibe nur 0,1 m dick ist, im Gegensatz zur Kugel, deren Durchmesser 0,2 m ist. Wäre die Scheibe 0,14 m dick, wären die beiden Felder gleich. Je höher der Zylinder, umso stärker wird das zentrale Feld. Im Grenzfall $h \rightarrow \infty$ hat das Magnetfeld die Form

$$\begin{aligned} l = \infty: \quad B_z(\rho) &= \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{b}{\mu_0}} \rho_m \omega_0 r_0^2 \left(\frac{1}{2} - \rho^2 \right) \\ &= 2,3555 \times 10^{-4} \left(\frac{1}{2} - \rho^2 \right) \text{ Gauss.} \end{aligned} \quad (42)$$

Die Feldstärke auf der Achse beträgt jetzt $1,1777 \times 10^{-4}$ Gauss oder rund $1\frac{1}{2}$ mal so viel wie bei der Scheibe mit $h=0,05$ m. Man könnte diesen Effekt ausnutzen und evtl. nur einen langen Stab mit hohem μ/μ_0 rotieren lassen. Gleichung (42) bei $\rho=0$ lässt sich auch so schreiben:

$$\begin{aligned} B_z(0) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{b}{\mu_0}} \rho_m \cdot \frac{\mu}{\mu_0} \omega_0 r_0^2 \\ &= 2,3431 \times 10^{-4} \frac{\mu}{\mu_0} \omega_0 r_0^2 \text{ Gauss.} \end{aligned} \quad (43)$$

Mit $\frac{\mu}{\mu_0} = 3 \times 10^4$, $\omega_0 = 2\pi \cdot 1000$ rad/s braucht r_0 nur 2,61 cm zu sein um ein Feld von 3×10^{-4} Gauss zu erreichen, das viermal so stark wäre wie das Feld der rotierenden Scheibe.

Herrn
A. Harasim
MBB Apparate
Postfach 80 11 49
D-8000 München 80

30.3.1985

Sehr geehrter Herr Harasim,

Bitte entschuldigen Sie, dass ich Ihnen erst heute schreibe. Wir sind kurz nach meinem Besuch bei MBB verreist und erst vorgestern zurückgekommen, so dass keine Möglichkeit bestand mich früher zu melden.

Ich danke Ihnen und Herrn Kroy noch einmal herzlich für die freundliche Einladung. Es war ein ausserordentlich interessanter und anregender Tag, auch wenn es mir nicht gelang dem Vortrag von Herrn Heim in allen Punkten zu folgen. Den gedruckten Bericht habe ich erst flüchtig gelesen, aber der erste Teil scheint sehr verständlich geschrieben zu sein, jedenfalls viel besser als die entsprechende Stelle im ersten Band.

Auch die Beschreibung des Alternativexperiments habe ich noch nicht sehr sorgfältig studiert. Trotzdem kommen mir schon jetzt gewisse Bedenken. Die Rotation einzelner Staubteilchen sieht zunächst wie das gravitative Analogon zur Rotation elektrisch geladener Teilchen unter der Lorentzkraft $e\vec{v} \times \vec{H}$ aus. Das gravitative Äquivalent ist die Kraft $m\vec{v} \times \beta \vec{f}$, und unter Einwirkung dieser Kraft könnten neutrale Teilchen tatsächlich rotieren. Herr Heim geht aber von einer ganz anderen Gleichung aus, nämlich von $\pi \nabla \times \vec{D} = \sigma \sqrt{\rho f_0} (\vec{v}_s \times \vec{\omega}_s)$, für deren Ableitung man beide Bände studieren müsste, was im Moment leider nicht möglich ist. Zum Schluss bleibt ihm die Gleichung $\alpha \vec{G} = \sigma (\vec{v} \times \vec{\omega})$, die er so interpretiert, dass $\vec{G}$ Wirbel im verdünnten Gas erzeugt, die die Staubteilchen mitreissen. Man muss aber bedenken, dass jedes Gasmolekül seinen eigenen Kreis beschreibt und dabei durch Kollision mit anderen Gasmolekülen unzählige Male gestört wird. Es ist daher fraglich, ob geschlossene Wirbel tatsächlich zustande kommen. Auch in einem Fusionsreaktor rotieren die Ionen

und Elektronen, in diesem Fall um die Magnetfeldlinien, aber ohne Wirbelbildung. Ein weiterer Punkt betrifft die linke Seite der Gleichung, $\propto \dot{\vec{G}}$. Wenn $\vec{G}$ gleichgerichtet aber nicht geglättet ist, hat es ungefähr folgende Form: . Obwohl sich die Richtung von $\vec{G}$ nicht ändert, wechselt $\dot{\vec{G}}$ das Vorzeichen in der Mitte eines jeden Pulses. Das bedeutet aber, dass auch $\vec{\omega}$ seine Richtung einmal pro Puls ändert und dass keine geschlossene Kreisbewegung zustande kommt. Ausserdem ist mir nicht klar, wie man die Gleichung lösen soll, selbst wenn die linke Seite bekannt ist, denn die Richtung von $\vec{\omega}$ ist ja nicht bekannt, nur die Richtung von $\vec{r} \times \vec{\omega}$. Es sollte aber sehr leicht sein festzustellen, ob das von Herrn von Ludwiger ausgeführte Experiment der Gleichung genügt, denn dort ^{sind} ja sämtliche Faktoren bekannt.

Ich vergass ganz Ihnen zu sagen, dass Sie sich bei der Literatursuche nach Artikeln über Solitonen auf die Jahre nach 1980 beschränken können. Beiliegend übersende ich Ihnen auch das Bahnbillett und die Taxirechnung. Sie können den Betrag auf mein DM-Konto Nr. 221.744.64 J KK bei der Schweizerischen Bankgesellschaft, CH-5401 Baden, überweisen lassen. Mit bestem Dank im voraus und

freundlichen Grüßen

H. Auerbach

Experimente zur Messung des magnetisch induzierten Gravitationsfeldes

1. Einleitung

Die bisher geplanten Experimente dienen zur Messung des von einem Massenstrom erzeugten Magnetfeldes. Im vorliegenden Bericht werden Experimente beschrieben, in denen der umgekehrte Effekt gemessen wird, nämlich die Induktion eines Massenstroms durch ein Magnetfeld.

Die experimentelle Anordnung ist schematisch in Fig. 1 und im Schnitt in Fig. 2 dargestellt. Der rechte Arm eines geschlossenen Jochs aus hochpermeablem Material trägt eine Spule, durch die ein zeitabhängiger Strom $i(t)$ fließt. Auf der gegenüberliegenden Seite wird der senkrechte, zylindrische Jocharm von einem an 3 Drähten aufgehängten Hohlzylinder aus nichtleitendem Material umgeben. Über eine aufgedampfte Metallschicht kann der Zylinder gerdet werden. Die drei Trägerdrähte vereinigen sich zu einem einzigen dünnen Draht oder Faden, an dem der Zylinder aufgehängt ist. Zylinder und Drähte sind von einer Kupferabschirmung umgeben um elektrische Streufelder auszuschliessen. Ein Spiegelarrangement verbunden mit einem Messmikroskop oder mit einem Interferometer misst die leichten Abweichungen des Zylinders von der Ruhelage.

2. Theorie

Der zeitabhängige Strom $i(t)$, der durch die Spule fließt, kann immer in der Form

$$i(t) = i_0 f(t), \quad 0 \leq f(t) \leq 1 \quad (2.1)$$

ausgedrückt werden. Er induziert ein Magnetfeld $B(t)$

$$B(t) = N \frac{\mu}{\mu_0} \mu_0 i(t) \quad (2.2)$$

im Joch, wobei N die Anzahl Windungen pro Meter ist. Gleichung (2.2) kann, unter Zuhilfenahme von Gl. (2.1) auch so geschrieben werden:

$$B(t) = B_0 f(t) \quad (2.3)$$

$$B_0 = N \frac{\mu}{\mu_0} \mu_0 i_0 \quad (\text{konstant}).$$

Da das Jochmaterial hochpermeabel ist, gehen praktisch keine Feldlinien verloren, und der Fluss im Innern des gegenüberliegenden Jocharms ist der gleiche wie innerhalb der Spule.

Ein zeitlich variierendes Magnetfeld $\vec{B}$ induziert ein elektrisches Feld $\vec{E}$ und, nach Heims Theorie, auch ein Gravitationsfeld $\vec{T}$. Wenn das Mesofeld $\vec{\mu}$ vernachlässigt wird, was gegenüber $\vec{B}$ sicherlich gestattet ist, lässt sich Heims Gleichung (Gl. (46.3) im Bericht vom 2.2.1984) so schreiben:

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \vec{T}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Im Innern der Feldabschirmung verschwindet das elektrische Feld $\vec{E}$, so dass dort die Gleichung

innerhalb der Abschirmung:
$$\nabla \times \vec{T} = - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

gilt. Der Faktor $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}}$ ist von der Grössenordnung 10^{-10} , der gravitative Effekt ist also ausserordentlich klein. Ausserhalb der Abschirmung kann das gravitative Feld vernachlässigt werden und man erhält die übliche Maxwellsche Gleichung

ausserhalb der Abschirmung:
$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.6)$$

Die Lösungen von Gl. (2.5) und (2.6) sind für den hier vorliegenden Fall eines räumlich konstanten Magnetfeldes bekannt. Die Feldlinien von $\vec{E}$ und $\vec{T}$ bilden Kreise um den Magnetkern und erfüllen die Relation ($2r_0$ =Innendurchmesser der Spule)

$$\begin{aligned} 2\pi r T &= - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \pi r_0^2 B_0 \frac{df}{dt} \\ 2\pi r E &= - \pi r_0^2 B_0 \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

d.h. das Linienintegral von $\vec{T}$ und $\vec{E}$ um eine Feldlinie mit Radius r ist gleich dem Fluss der rechten Seite von Gl. (2.5) und (2.6) durch die von der Feldlinie aufgespannte Fläche. $\vec{E}$ ist offensichtlich 10^{10} mal stärker als $\vec{T}$ und sollte daher abgeschirmt werden um Störeffekte zu vermeiden.

Wenn das Vorzeichen zunächst vernachlässigt wird, ist das induzierte Gravitationsfeld nach Gl. (2.7)

$$\Gamma(r, t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \frac{1}{r} \dot{r}_0^2 B_0 \frac{df}{dt} . \quad (2.8)$$

Die tangential zur Drehachse wirkende Kraft, die Γ auf ein Massenelement dm des Zylinders ausübt, ist Γdm , mit

$$dm = 2\pi \rho l r dr \quad (2.9)$$

(ρ =Dichte, l =Länge des Zylinders). Das gesamte Drehmoment T_m , das auf den Zylinder einwirkt, ist daher

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \int r \Gamma dm \\ &= \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \dot{r}_0^2 B_0 \frac{df}{dt} \rho l \int_{r_1}^{r_2} r dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \dot{r}_0^2 B_0 \rho l (r_2^2 - r_1^2) \frac{df}{dt} , \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei r_1 der innere und r_2 der äussere Zylinderradius ist. Da die Masse M des Zylinders

$$M = \pi \rho l (r_2^2 - r_1^2) \quad (2.11)$$

beträgt, lässt sich Gl. (2.10) auch in der Form

$$T_m(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \dot{r}_0^2 B_0 M \frac{df}{dt} \quad (2.12)$$

schreiben.

Ausser dem antreibenden Drehmoment T_m wirkt noch ein bremsendes Drehmoment $-\kappa\theta$ auf den Zylinder ein, das vom Draht ausgeübt wird, an dem der Zylinder hängt. Hierbei ist κ die Torsionskonstante des Drahtes und $\theta(t)$ der Winkel, um den sich der Zylinder zur Zeit t gegenüber der Nulllage gedreht hat. Eine zweite bremsende Kraft, die zu $d\theta/dt$ proportional ist und bei der Beschreibung des ballistischen Galvanometers eine Rolle spielt, soll hier vernachlässigt werden, da $d\theta/dt$ verschwindend klein ist. Dagegen könnte die Drehung der Erde Auswirkungen auf das Experiment haben. Sollte das der Fall sein, müsste sie kompensiert werden (vergl. auch § 5).

Die Bewegungsgleichung des Zylinders lautet nun

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = T_m - \kappa\theta \quad (2.13)$$

oder, mit Gl. (2.12),

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta &= K \frac{df}{dt} \\ K &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\alpha}} \kappa_0^2 b_0 \frac{M}{I} , \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei I, das Trägheitsmoment des Zylinders, durch den Ausdruck

$$I = \frac{1}{2} M (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \quad (2.15)$$

gegeben ist.

Gleichung (2.14) kann nur gelöst werden, wenn $f(t)$ bekannt ist. Im weiteren sollen daher zwei mögliche Formen von $f(t)$ näher untersucht werden.

3. Das ballistische Experiment

Wenn zur Zeit $t=0$ eine konstante Spannung V an den Primärstromkreis gelegt wird, fliesst ein Strom, dessen Zeitverhalten von Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität des Stromkreises, sowie von der induktiven Rückwirkung der Abschirmung bestimmt wird. Für $t \rightarrow \infty$ geht $i(t)$ in einen Gleichstrom i_0 über. Abgesehen von hochfrequenten Oszillationen, denen der Zylinder sowieso nicht zu folgen vermag, hat der Strom daher keine negative Ableitung nach der Zeit, so dass $di/dt \geq 0$ ist.

Die tatsächliche Form des Stroms kann kompliziert sein. Um das Problem aber nicht unnötig zu erschweren soll angenommen werden, dass $f(t)$ die Form

$$f(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (3.1)$$

hat. Diese Form gilt streng für einen Primärstromkreis, der nur Widerstand und Selbstinduktion enthält. Die Grösse von λ kann

vorläufig offen bleiben. Eingesetzt in Gl. (2.14) ergibt das

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta = K\lambda e^{-\lambda t}. \quad (3.2)$$

Die homogene Lösung dieser Gleichung ist

$$\theta_h(t) = A \sin \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t + B \cos \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t, \quad (3.3)$$

mit den Integrationskonstanten A und B. Eine partikuläre Lösung ist

$$\theta_p(t) = \frac{K\lambda}{\lambda^2 + \frac{\kappa}{I}} e^{-\lambda t}. \quad (3.4)$$

Die Konstanten A und B bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen

$$\theta(0) = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} = 0 \quad (3.5)$$

zu

$$A = \frac{K\lambda^2}{\lambda^2 + \frac{\kappa}{I}} \sqrt{\frac{I}{\kappa}}, \quad B = -\frac{K\lambda}{\lambda^2 + \frac{\kappa}{I}}. \quad (3.6)$$

Damit wird die vollständige Lösung von Gl. (3.2)

$$\theta(t) = \frac{K}{\lambda(1 + \frac{\kappa}{I\lambda^2})} \left(\lambda \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \sin \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t - \cos \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t + e^{-\lambda t} \right). \quad (3.7)$$

Für ein nicht zu kleines λ kann angenommen werden, dass $\lambda \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \gg 1$ ist, so dass für $\theta(t)$ in guter Näherung

$$\begin{aligned} \theta(t) &\approx K \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \sin \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{d\kappa}} \lambda_0^2 B_0 \frac{M}{\sqrt{I}} \sin \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t \end{aligned} \quad (3.8)$$

geschrieben werden kann. Gleichung (3.8) entspricht der üblichen Formel für den Ausschlag eines ballistischen Galvanometers. Danach beschreibt der Zylinder eine Schwingung mit der Periode $2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$ und der Amplitude

$$\theta_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{d\kappa}} \lambda_0^2 B_0 \frac{M}{\sqrt{I}}. \quad (3.9)$$

Gleichung (3.9) ist ausschlaggebend für das Experiment und muss durch geeignete Wahl der Parameter so gross wie möglich gemacht werden. Dabei muss aber berücksichtigt werden, dass κ indirekt von M abhängt, so dass Gl. (3.9) noch nicht die endgültige Form darstellt. Die Torsionskonstante κ muss natürlich möglichst klein sein, aber der Faden oder Draht, an dem der Zylinder hängt, muss sein Gewicht mit einem bestimmten Sicherheitsfaktor tragen können. Wenn E der Zerreiissmodulus des Drahtes und a sein Radius ist, so gilt

$$\text{Zerreiissspannung} = E \pi a^2. \quad (3.10)$$

Das Gewicht des Zylinders, Mg ($g=9.81 \text{ m/s}^2$), muss also, bei einem Sicherheitsfaktor von 2,

$$Mg = \frac{\pi}{2} E a^2 \quad (3.11)$$

sein, oder

$$a^2 = \frac{2}{\pi} \frac{Mg}{E}. \quad (3.12)$$

Die Torsionskonstante eines Zylinders ist

$$\kappa = G \frac{a^4}{L}, \quad (3.13)$$

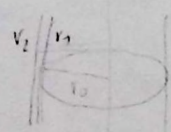
wobei G der Torsionsmodulus und L die Länge des Drahtes ist. Mit Gl. (3.12) ergibt sich dann für κ ,

$$\kappa = \frac{4}{\pi} \frac{g^2 G}{E^2} \frac{M^2}{L}. \quad (3.14)$$

Daraus folgt die endgültige Formel für $\theta_{\max}$,

$$\theta_{\max} = \frac{E}{3g\kappa} \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\alpha G M (1 + \frac{\epsilon_0}{\kappa})}} \kappa^2 \beta_0. \quad (3.15)$$

Aus dieser Beziehung lässt sich erkennen, dass die Masse M des Zylinders sowie sein Aussenradius r_2 möglichst klein sein sollten. Ausserdem sollte der Zylinder dünnwandig sein, also $r_1 \sim r_2$. Der Draht soll dünn sein, aber nicht so dünn, dass er nicht herstellbar



ist, und auch die Wandstärke des Zylinders darf nicht unrealistisch dünn sein. Schliesslich sollte M gross genug sein um Störeffekte zu vermeiden.

Um $\theta_{\max}$ abzuschätzen nehmen wir einen Aufhängedraht von 0.05 mm Durchmesser, also $a=2.5 \times 10^{-5}$ m. Für Klaviersaitendraht ist

$$E = 1.025 \times 10^9 \text{ kg/m}^2.$$

Daraus ergibt sich für M nach Gl. (3.12)

$$M = 0.1026 \text{ kg}.$$

Für die Aussen- und Innenradien wählen wir

$$r_1 = 0.049 \text{ m}$$

$$r_2 = 0.050 \text{ m} ,$$

so dass der Zylinder eine Wandstärke von einem Millimeter hat. Mit einer Dichte $\rho=5000 \text{ kg/m}^3$ erhält man daraus für die Länge des Zylinders $l=6.6 \text{ cm}$, so dass der Zylinder in einer kleinen Anordnung Platz hat. Die übrigen Parameter in Gl. (3.15) sind

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ s}^2 \text{ coul}^2 / \text{kg}^2 \text{ m}^3$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\gamma} = 1.1925 \times 10^9 \text{ s}^2 \text{ kg/m}^3$$

$$G = 1.3 \times 10^{10} \text{ kg/ms}^2 \text{ (für Stahl, nicht ganz sicher)}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$r_0^2 B_0 = 0.5 \text{ m}^2 \text{T}.$$

Mit diesen Zahlen ergibt sich für den Ausschlag

$$\theta_{\max} = 2.08 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

$$= 0.43 \text{ Bogensekunden} .$$

Benutzt man die einfache, in Fig. 1 dargestellte optische Messvorrichtung mit einem Hebelarm von 1 m, so entspricht $\theta_{\max}$ einer

seitlichen Verschiebung des Lichtstrahls von 4.16×10^{-3} mm. Bei 250-facher Vergrößerung des Mikroskops ergibt das eine Verschiebung von einem Millimeter im Bildfeld, was leicht festzustellen ist. Interferenzmethoden und mehrfache Faltung des Lichtstrahls können die Messempfindlichkeit noch um ein bis zwei Größenordnungen steigern.

Die Empfindlichkeit des Experiments kann durch eine geeignete Wahl des Aufhängefadens (z.B. Nylon) wahrscheinlich noch verbessert werden. Andererseits ist der Flusswert von $r_0^2 B_0 = 0.5$ möglicherweise etwas zu hoch. Die Permeabilität μ braucht nicht unbedingt auf dem geraden Teil der Hysteresiskurve zu liegen, denn eine beliebige t -Abhängigkeit von $i(t)$, die auch nichtlinear sein kann, würde die Lösung der Bewegungsgleichung zwar komplizieren, doch kann der Puls immer so eingerichtet werden, dass $di/dt=0$ ist, bevor sich der Zylinder in Bewegung gesetzt hat. In diesem Fall gilt Gl. (3.9) immer noch.

4. Das Resonanzexperiment

Wie aus Gl. (3.7) ersichtlich ist, besitzt das System eine Eigenfrequenz $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$. Diese Eigenschaft kann dazu benutzt werden um den Ausschlag $\theta_{\max}$ noch beträchtlich zu verstärken. Wenn $i(t)$ die gleiche Frequenz hat, entsteht eine Resonanz zwischen dem Magnetfeld und dem Zylinder, dessen Schwingungen sich laufend vergrößern.

Die Bewegungsgleichung ist wieder Gl. (2.14), aber diesmal mit

$$i(t) = \sin \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t. \quad (4.1)$$

Für sehr lange Perioden kann der Strom mechanisch oszilliert werden. Die Bewegungsgleichung wird jetzt

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I} \theta = K \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \cos \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t. \quad (4.2)$$

Die Lösung dieser Gleichung mit den Anfangsbedingungen von Gl. (3.5) lässt sich am einfachsten durch Laplace Transformation finden und ist

$$\theta(t) = \frac{1}{2} k t \sin \sqrt{\frac{\gamma}{I}} t. \quad (4.3)$$

Die maximale Amplitude $\theta_{\max}(t)$ wird immer bei $t=t_n$ erreicht und ist gegeben durch

$$\theta_{\max} = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{\lambda_n^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{a}} \frac{\lambda_0^2 b_0}{1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_n^2}} t_n \quad (4.4)$$

$$t_n = \frac{1}{\lambda} (2n-1) \pi \sqrt{\frac{I}{\gamma}}, \quad n=1, 2, \dots$$

Nimmt man das gleiche Zahlenbeispiel wie im vorangegangenen Experiment, so erhält man

$$\begin{aligned} \theta_{\max}(n) &= 5.86 \times 10^{-9} t_n \text{ rad.} \\ &= 1.21 \times 10^{-3} t_n \text{ Bogensekunden} \end{aligned}$$

und eine Verschiebung des Lichtstrahls bei 250-facher Vergrößerung von $2.93 \times 10^{-3} t_n$ mm im Bildfeld des Mikroskops. Die Torsionskonstante κ kann bei diesem Experiment mit einem viel grosszügigeren Sicherheitsfaktor gewählt werden. Wenn der Drahtdurchmesser z.B. $2a=0.1$ mm und die Länge $L=1$ m ist, ergibt sich κ nach Gl. (3.13) zu

$$\kappa = 8.125 \times 10^{-8} \text{ kgm}^2/\text{s}^2.$$

Der Zylinder wird etwas verlängert, so dass seine Masse $M=0.15$ kg beträgt. Dann ist das Trägheitsmoment

$$I = 3.676 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2.$$

Nach $n=17$ Schwingungen ist $t_n=3698$ s, also rund eine Stunde. Nach dieser Beobachtungszeit wäre eine Verschiebung im Mikroskop von 10.8 mm zu beobachten.

5. Schlussfolgerungen

Die hier vorgeschlagenen Experimente unterscheiden sich grundsätzlich vom geplanten Experiment mit rotierendem Zylinder, indem bei den in diesem Bericht besprochenen Versuchen das Gravitationsfeld gemessen wird und nicht das induzierte Magnetfeld.

Sie entsprechen daher eher den Vorstellungen von Herrn Heim, dessen Alternativexperiment (MBB 100/85 von Herrn v. Ludwiger) im Grunde ebenfalls auf Gl. (2.4) basiert. Vom praktischen Standpunkt aus gesehen haben sie den Vorteil, keine beweglichen Teile zu haben, so dass der relativ komplizierte Antriebsmechanismus entfällt.

Beide unter (3) und (4) beschriebenen Experimente würden sich für eine Messung der Beziehung zwischen Magnetfeld und Gravitationsfeld eignen. Das Resonanzexperiment weist gegenüber dem ballistischen Experiment gewisse Vorteile auf: Es enthält den Verstärkungsfaktor t_n und ist unabhängiger von der Wahl von α , ρ und l .

Die Störung durch ein elektrisches Streufeld dürfte sich bei beiden Experimenten in Grenzen halten. Nach Gl. (2.7) und unter Vernachlässigung des Vorzeichens ist

$$E(r,t) = \frac{1}{2\epsilon_0} \epsilon_0^2 \beta_0 \frac{d\beta}{dt} \quad (5.1)$$

Wenn sich ein Elektron an die Aussenwand des Zylinders ($r=r_2$) anlagert, erzeugt das unabgeschirmte elektrische Feld ein Drehmoment

$$\begin{aligned} T_e &= -e r_2 E(r_2, t) \\ &= -\frac{1}{2} e \epsilon_0^2 \beta_0 \frac{d\beta}{dt} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Mit $e=1.6020 \times 10^{-19}$ coul. ist das Verhältnis von T_e zu T_m (Gl. (2.12), Absolutbetrag)

$$\begin{aligned} \frac{T_e}{T_m} &= \frac{3e}{4M} \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon_0}} = \frac{1.4 \times 10^{-9}}{M} \\ &\approx 10^{-8} \end{aligned} \quad (5.3)$$

bei einer Masse von $M=0.1$ kg. Bei abgeschirmtem Feld wird dieser Faktor sicher noch um einige Grössenordnungen reduziert. Es müssten sich also sehr viele Elektronen auf dem Zylinder ansammeln bevor das Experiment ernsthaft behindert würde. Um ganz sicher zu gehen, wäre es vorteilhaft, den Zylinder mit einer dünnen Metallschicht

zu überziehen und zu erden. Wahrscheinlich wäre es auch günstig, die Abschirmung zu evakuieren.

Das elektrische Drehmoment T_e , Gl. (5.2), wirkt entgegengesetzt zu T_m . Wenn daher überhaupt eine Drehung in Richtung T_m erfolgt, muss sie vom Gravitationsfeld herrühren.

Ein weiterer Störeffekt ist der Einfluss der Erdrotation auf den Zylinder. Wenn φ der Breitengrad am Ort des Experiments ist ($\varphi=48.2^\circ$ für München), so beträgt der Drehwinkel dort $\omega t \sin \varphi$ (ω =Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation = $7.29211 \times 10^{-5}/s$). Diese Drehung wird vom Draht mit der Torsionskonstanten κ auf den Zylinder übertragen. Zur gravitativen Bewegung des Zylinders käme daher noch eine weitere Bewegung hinzu, die durch die Gleichung

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \kappa \theta = \kappa \omega t \sin \varphi \quad (5.4)$$

beschrieben wird. Die Lösung dieser Gleichung mit den üblichen Anfangsbedingungen ist

$$\theta(t) = \omega \left(t - \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \sin \sqrt{\frac{\kappa}{I}} t \right) \sin \varphi . \quad (5.5)$$

Aufgrund dieser Formel würde sich θ ständig mit t im Uhrzeigersinn vergrößern und gleichzeitig würde der Zylinder in Schwingungen geraten. Es sollte möglich sein, diesen Effekt dadurch zu unterdrücken, dass der Zylinder an einem Mechanismus aufgehängt wird, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ in der entgegengesetzten Richtung dreht.

Es gibt noch andere Möglichkeiten um das Prinzip der Resonanz auszunutzen. Abbildung 3 zeigt eine von ihnen. Der Ring R ist an einem Ende befestigt. Durch das Feld $\Gamma(t)$, das mit der Eigenfrequenz des Rings oszilliert, wird er in Schwingung versetzt. Dadurch ändert der Kondensor am offenen Ende des Rings seine Kapazität und erzeugt einen entsprechenden Wechselstrom in einem Stromkreis, dessen Eigenfrequenz evtl. ebenfalls der Frequenz des Rings entsprechen könnte. Es lassen sich bestimmt noch andere und vielleicht bessere experimentelle Anordnungen finden, die auf dem Resonanzprinzip beruhen.

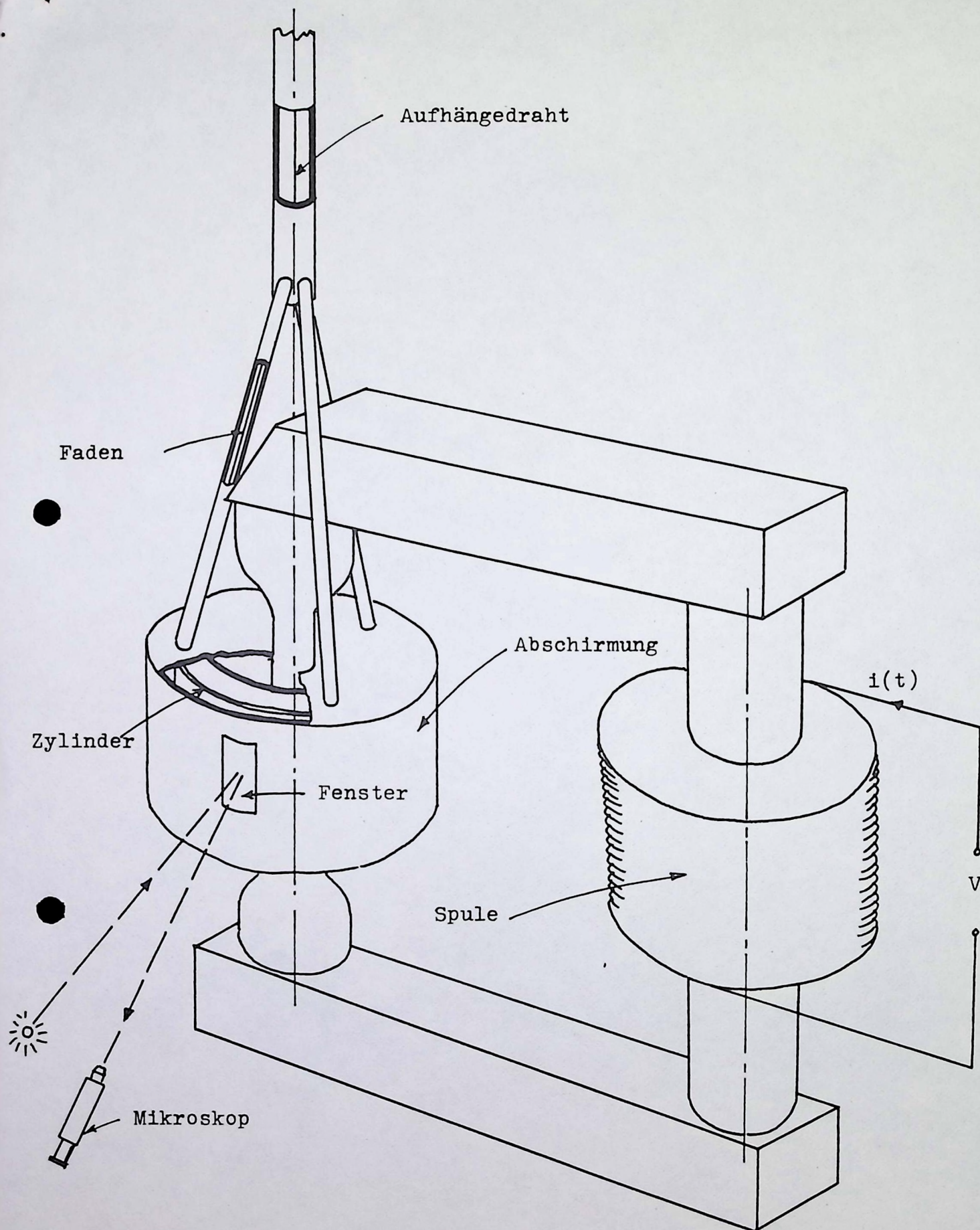


Fig. 1

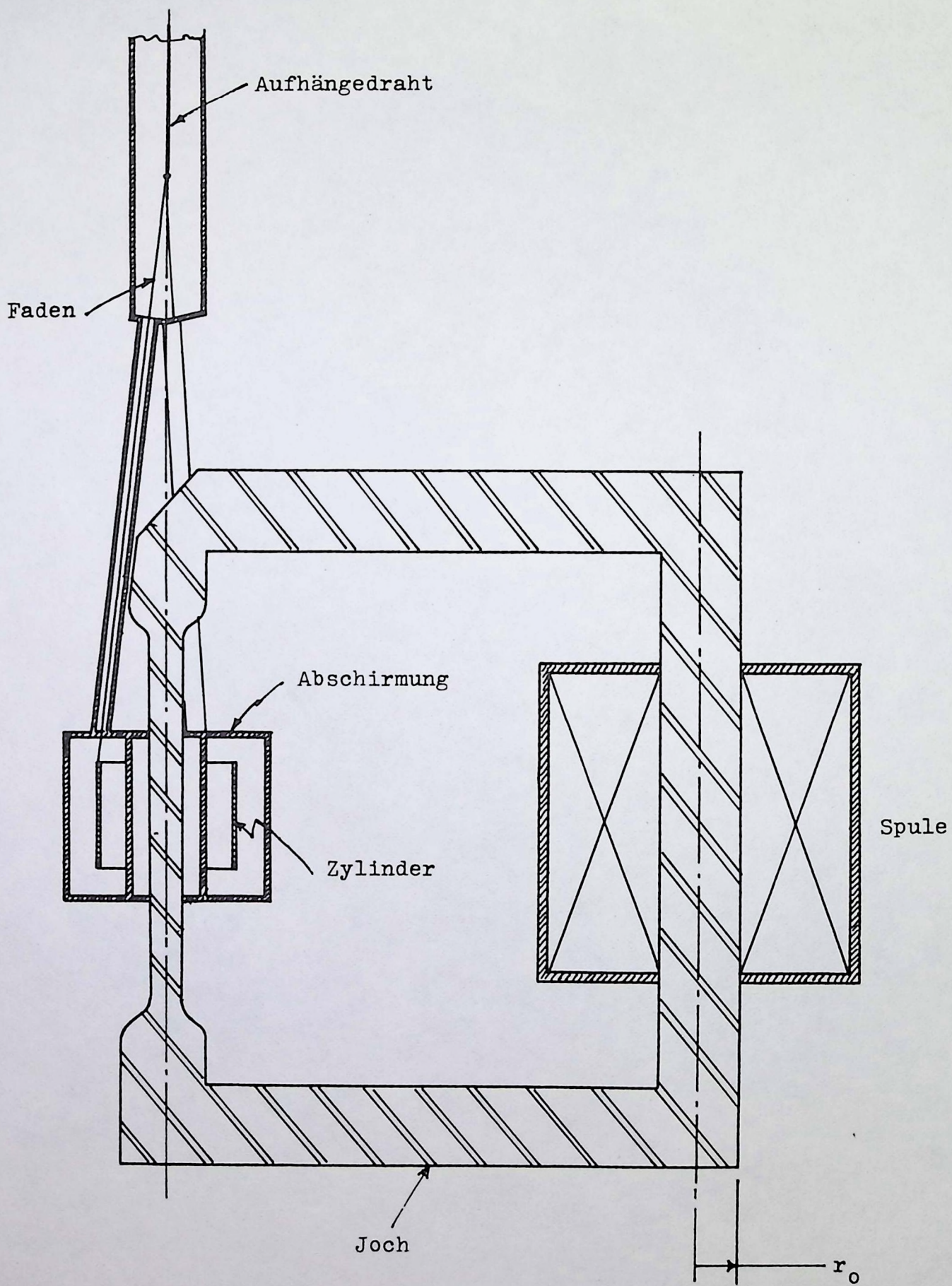


Fig. 2

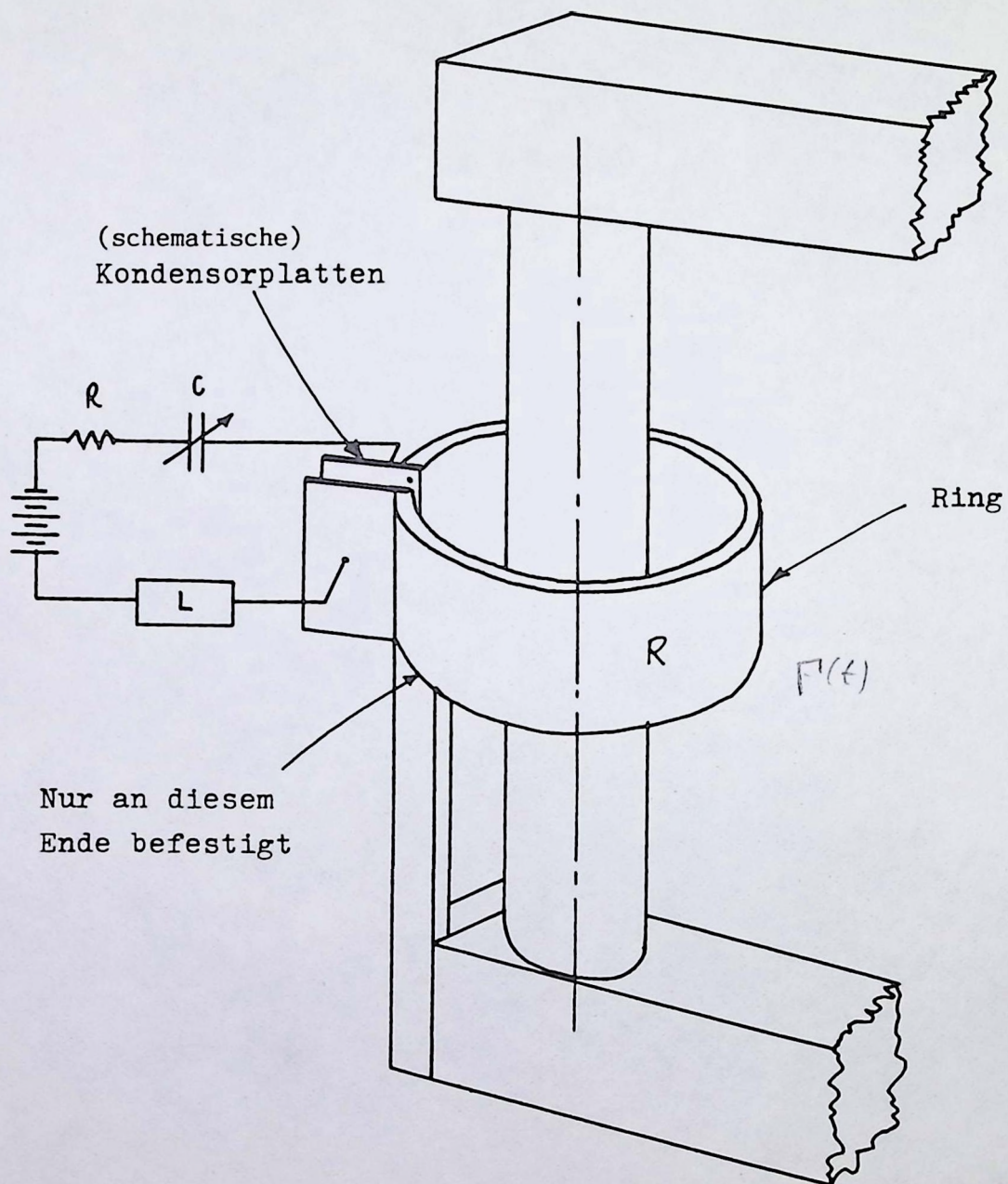


Fig. 3