

Suche nach der inneren Struktur der Materie

1. Materiedichte als Ausdruck der Raumzeit-Krümmung von Makrostrukturen

Nach heutiger Auffassung wird die Gravitation durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Danach sind Trägheit und Schwere ein und dasselbe, und da sich die Trägheit forttransformieren läßt (zum Beispiel durch die Wahl eines frei fallenden Lifts als Bezugssystem), ist Gravitation eine Scheinkraft. Diese Scheinkraft entsteht durch die Krümmung der Raum-Zeit-Geometrie. Alle Experimente konnten diese Theorie Einsteins bisher bestätigen.

Die Schwerkraft läßt sich nicht abschirmen und es ist nicht ersichtlich, wie sie durch andere Felder (beispielsweise das magnetische) erzeugt werden könnte. Damit Gravitationswellen (als Quadrupol-Strahlung) entstehen können, müssen ganze Sterne oder Sternsysteme schwingen oder kollabieren. Und auch dann noch sind die zu registrierenden Wirkungen äußerst schwach. Die Schwerkraft ist 10^{36} mal schwächer als die elektromagnetische Kraft. In der Einsteinschen Gravitationstheorie ist es hoffnungslos, Raumkrümmungen, Trägheitswirkungen oder Gravitationsfelder für technische Anwendungen zu erzeugen.

Etwas an der Allgemeinen Relativitätstheorie ist noch korrektur- oder erweiterungsbedürftig. Denn die theoretische Erklärung für die Erfahrungstatsache, daß die schwere und die träge Masse gleich sind, ist bisher noch nicht gefunden worden. Wir wollen zeigen, wo diese ART noch Schwachpunkte besitzt und was angesichts der Forderung nach „Verträglichkeit mit den Beobachtungsdaten“ abgeändert werden muß.

Ausgangspunkt für die Gravitationstheorie, wie wir sie heute kennen, war Einsteins Versuch, die Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie (SRT), wonach Naturgesetze in inertialen (gleichförmig gegen einander bewegten) Systemen gleich ablaufen, auch auf die Gesetze in gleichförmig gegeneinander beschleunigte Systeme auszudehnen. Die Invarianz der Naturgesetze wird in der SRT durch die 10-parametrische Lorentz-Gruppe (anstelle der Galilei-Gruppe) für Transformationen sicher gestellt.

Alle, auch die gegen den absoluten Raum beschleunigten Bezugssysteme sollten gleichberechtigt sein. Die Trägheit soll nach einer Idee von Ernst Mach durch die Wirkung aller am Himmel verteilten Sterne durch Induktion entstehen. Aufgrund der sehr genau bestätigten Äquivalenz von träger und schwerer Masse vermutete Einstein, daß der Kausalzusammenhang durch die Gravitationswechselwirkung zwischen den Fixsternen und den beschleunigten Körpern hergestellt würde. Um auch Beschleunigungen zu relativieren, ist es erforderlich, alle physikalischen Größen in einer Form zu schreiben, daß sie in beliebigen Koordinatensystemen - auch deformierten - unverändert blieben, daß sie also allgemein kovariant sind.

Dazu müssen physikalische Größen die Gestalt von 4-dimensionalen Tensoren besitzen, deren Eigenschaften dadurch gegeben sind, daß sie sich bei Transformationen von einem zum anderen Bezugssystem nicht ändern.

Galilei hatte bereits festgestellt, daß alle Körper, unabhängig von ihrer Konsistenz (beispielsweise Blei und Watte) im Gravitationsfeld gleichen Bahnkurven folgen, also mußte die Wirkung der Schwerkraft auf die Geometrie des Raumes selbst zurückzuführen sein.

Poincare

Mach
gibt kein
phys. Gesetz

Die Forderungen nach allgemeiner Kovarianz, die strenge Gleichheit von träger und schwerer Masse und die Forderung nach einer bestimmten Raumgeometrie führten Einstein zu seiner Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), in der die Welt als Raum-Zeit mit Riemannscher Geometrie beschrieben wird, die ihre Krümmung durch die Verteilung der Energie-Impulsdichte im Raum erhält:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\kappa T_{ik} \quad (1)$$

Darin bedeuten $g_{ik} = g_{ki}$ (mit $k, i = 1, \dots, 4$) den symmetrischen metrischen Fundamentaltensor, der folgendermaßen definiert ist: Sind ξ^i euklidische Koordinaten eines lokalen Inertialsystems und x^m nichteuklidische Koordinaten, dann sind beide Koordinatensysteme durch folgende Beziehung verknüpft:

$$g_{ik} = \eta_{lm} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \quad (2)$$

R_{ik} ist der Ricci-Tensor, das ist der verjüngte Riemannsche Krümmungstensor R_{limk} :

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk}, \quad (3)$$

R ist der Krümmungsskalar, T_{ik} der Energie-Dichte-Tensor der Materie und $\kappa = 8\pi\gamma/c^2$ eine Konstante, die bei Approximation auf kleine Geschwindigkeiten und geringe Gravitationsfeldstärken Gleichung (1) auf die Poisson-Gleichung der Newtonschen Gravitationstheorie reduziert:

$$\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho, \quad (4)$$

wenn φ das Gravitationspotential, γ die Gravitationskonstante, ρ die Dichte der Materie und Δ den dreidimensionalen Laplace-Operator div grad bedeuten.

Diese Gleichung wird als eine der größten Denkleistungen der Menschheit angesehen. Einstein hatte den Strukturanteil mit einem phänomenologischen bzw. physikalischen Anteil gleich gesetzt, weil sowohl die kovariante Ableitung des Ricci-Tensors als auch der Energie-Impulsdichtetensor Null sind. Die Gleichungen (1) sind die einzigen allgemein kovarianten, lokalen Gleichungen 2. Ordnung, die durch eine Metrik erfüllt werden können.

Einstein bezeichnete den Ricci-Tensor als „universelles Führungsfeld“:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^j - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{lm}^j \quad (5)$$

darin geben die Christoffel-Symbole Γ_{ik}^l die affine Verschiebung im gekrümmten Raum an:

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{\partial x^l}{\partial \xi^m} \frac{\partial^2 \xi^m}{\partial x^i \partial x^k} \quad (6)$$

wobei die $\xi^m(x)$ lokale inertiale Koordinaten sind.

Diese Affintensoren transformieren sich nicht wie Tensoren, sondern (wenn die gestrichelten die Koordinaten des neuen Bezugssystems sind) folgendermaßen:

$$\Gamma_{ik}^l \longrightarrow \Gamma_{ik}^{'l} \equiv \frac{\partial x^l}{\partial x^p} \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{k'}} \Gamma_{nm}^p + \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^p} \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \quad (7)$$

Bei Transformationen von Tensoren tritt das 2. Glied nicht auf. Für Affintensoren läßt sich immer ein Bezugssystem finden, in dem das zweite Glied gerade das erste kompensiert, so daß im neuen Bezugssystem die Γ_{ik}^l verschwinden. Darin äußert sich die Gravitation als Scheinkraft. Nur gegenüber linearen Transformationen bleiben die Γ_{ik}^l erhalten, verhalten sich also wie Tensor-Kräfte.

Mit den metrischen Koeffizienten g_{ik} hängen diese Dreizeigersymbole wie folgt zusammen:

$$\Gamma_{ik}^l = 1/2 g^{lm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \quad (8)$$

Die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt m unter dem Einfluß einer nicht gravitativen Kraft K^l lauten:

$$m \frac{d^2 x^l}{ds^2} + \Gamma_{ik}^l \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = K^l \quad (9)$$

In den Feldgleichungen (1) bestimmt die Materie die Krümmung des Raumes. In den Bewegungsgleichungen (9) schreibt die Raumkrümmung die Bewegungen von Teilchen vor. Die kräftefreien Bahnen stimmen mit den Autoparallelen des affinen Zusammenhangs Γ_{ik}^l überein.

Die Koeffizienten $g_{\mu\nu}$, welche im quadratischen Linienelement $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ die Geometrie des Raumes beschreiben (im ebenen Fall des pseudo-euklidischen Minkowski-Raumes $g_{ik} \equiv \eta_{ik}$), werden von Einstein mit dem tensoriellen Gravitationspotential identifiziert. In Newtonscher Näherung gilt für die zeitartige Komponente g_0^0 :

$$g_0^0 = -1 - 2\varphi/c^2, \quad \text{mit } \varphi = \gamma m/r \quad (10)$$

Die ART besitzt - entgegen Einsteins ursprünglicher Erwartung weniger Relativität als die SRT. Denn wenn global keine Materie existiert, also $T_{ik} = 0$, sollte nach dem Mach-Einstein-Prinzip auch kein durch g_{ik} induziertes Führungsfeld existieren, durch das bei nichtgeodätischen Bewegungen Trägheitskräfte hervorgerufen werden. Die g_{ik} verschwinden jedoch nicht, und es lassen sich auch im materiefreien Raum viele Vakuumlösungen finden, die freien Gravitationswellen entsprechen.

Es bleibt demnach ein von der Materie unabhängiger Anteil des Führungsfeldes, der sich nicht auf entfernte Massen zurückführen läßt. Einsteins Gravitationstheorie ist somit keine wirklich „allgemeine Relativitätstheorie“, sondern eine dualistische Theorie, in der sowohl die Energie-Materie als auch das Raum-Zeitkontinuum als eigenständige Entitäten auftreten. Trägheitswirkungen der materiefreien Raum-Zeit sind in unlösbarer Weise mit Gravitationswirkungen der Materie verbunden.

Trägheitskräfte scheinen nicht von entfernten Sternen herzurühren, sondern viel eher auf Fluktuationen des Vakuums zurückzugehen, die 1915 noch nicht bekannt waren und erst 1948

von Casimir vorhergesagt und inzwischen experimentell bestätigt worden sind. In kleinsten Raumbereichen werden die Energiedichten und damit die Gravitationseffekte bzw. Raumkrümmungen des Vakuums sehr groß.

Einsteins Gravitationstheorie erklärt die Gravitation nicht. Sie zeigt nur auf, daß sich diese Kraft in ihrer Wirkung vollständig geometrisch interpretieren läßt. Die eigentliche Quelle der Trägheit in der Materie erhält dagegen keine geometrische Interpretation. Wird die Gravitation global als Wirkung der über den Raum gleichmäßig verteilten Materie und Energie aufgefaßt, dann liefern die Feldgleichungen überprüfbare Aussagen über die Bewegungen von Planeten und über das Verhalten von Lichtstrahlen im Schwerefeld.

2. Versuche der Geometrisierung von Mikrostrukturen

Die einzige zentralsymmetrische Lösung (Birkhoffsches Theorem) sind die Lösungen der Feldgleichungen (1) mit der Metrik nach Schwarzschild:

$$ds^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 - g_{00}c^2dt^2 \quad (11)$$

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}} - r^2 d\varphi^2 - r^2 \sin^2 \varphi d\Theta^2 + (1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r})c^2 dt^2 \quad (12)$$

Aus dem 4. Glied in (12) lassen sich die Rotverschiebung, die Lichtablenkung in Gravitationsfeldern und die anomale Drehung des Merkurperihels quantitativ erklären. Da der Nenner im ersten Glied Null wird, wenn die Masse $2\gamma M/c^2 = r_s$ so dicht gepackt ist, daß der durch sie definierte „Schwarzschild-Radius“ r_s gleich der Länge r ist, führen riesige Massenansammlungen notwendigerweise zu Singularitäten (oder „Schwarzen Löchern“). Einstein, Eddington und Schwarzschild waren der Ansicht, daß die Natur keine Singularitäten zuließe und hielten r_s nur für die Grenze des Modells, die ohne physikalische Bedeutung wäre.

Diese drei Effekte können in einer Lorentz-invarianten Theorie der Gravitation nicht erklärt werden, wenn das Gravitationspotential ϕ als Skalarfeld im Minkowski-Raum angenommen wird (Nordström 1912). Der gleiche Versuch mit einem vektoriellen Gravitationspotential ϕ_λ (Synge 1960) liefert abstoßende Massen, im Gegensatz zur Erfahrung.

Doch die Herleitung von Feldgleichungen mit einem Tensorfeld $\phi_{\lambda\mu}$ im Minkowski-Raum durch Birkhoff (1943), Gupta (1952, 1957), Thirring (1961) u.a. ergab, daß sich das Gravitationsfeld als ein masseloses, symmetrisches Tensorfeld im pseudo-euklidischen Raum auffassen läßt. Feld- und Bewegungsgleichungen sind äquivalent zu denen in der Einsteinschen Theorie. Die Bahnen von Lichtstrahlen und Massepunkten im Gravitationsfeld lassen sich als Bahnen in einem Riemannschen Raum interpretieren. Die Riemann-Geometrie als observable Raum-Zeit-Struktur wird erst sekundär durch Ausmessen der Raumzeit mit Hilfe von Lichtstrahlen und Massenpunkten gegeben, während der Minkowski-Raum als unbeobachtbarer Darstellungsraum fungiert. Das Gravitationsfeld unterscheidet sich demnach nicht grundsätzlich von anderen Feldern. Allerdings kann die Lorentz-invariante Gravitationstheorie im Minkowski-Raum nicht die Quelle des Feldes erklären, die in der ART im Energie-Impulsdichte-Tensor der Materie besteht.

Weder die Lorentz-invariante Gravitationstheorie noch die ART können erklären, wodurch die Vakuum-Raum-Zeit bestimmt ist. Der materiefreie Raum kann als eigenständige physikalische Realität aufgefaßt werden, die unabhängig von Materie existiert.

Der Energie-Impuls-Tensor in Gleichung (1) muß noch durch den Anteil des Gravitationsfeldes selbst erweitert werden, da Teilchen im Gravitationsfeld Energie gewinnen und abgeben können. Einstein hat dafür den Pseudotensor t^{μ}_{ν} angegeben. Die Erhaltungsgleichungen für Energie und Impuls werden durch das Verschwinden der kovarianten Ableitung bestimmt:

$$(T_{ik} + t_{ik})_{;k} = 0 \quad (13)$$

Das Gravitationsfeld erweist sich als selbstgekoppelt, was die Nichtlinearitäten der Theorie erklärt. Diese Nichtlinearität der Feldgleichungen bewirkt, daß alle Körper gravitativ aufeinander wirken. Der Gesamt-Energie-Impuls eines Systems ist aber nicht mehr im Raum lokalisierbar.

Die Forderung nach allgemeiner Kovarianz physikalischer Gleichungen, auf der Einstein bestand, wird von vielen Physikern nicht als unabdingbar angesehen. Durch Einführen des metrischen Tensors lassen sich die Feldgleichungen immer allgemein kovariant schreiben (Kretschmann 1917). Die allgemeine Kovarianz ist dann - im Gegensatz zur Forderung nach Lorentzinvarianz - keine Forderung mehr an den Inhalt der Naturgesetze, sondern nur an deren Schreibweise.

Nathan Rosen schlug 1940 eine Modifikation der Einsteinschen Gravitationstheorie vor, durch Einführen des metrischen Tensors der Minkowskischen Raum-Zeit η_{ik} neben der das Gravitationspotential repräsentierenden Riemannschen Metrik g_{ik} . Die g_{ik} sollten die Maßbestimmung für alle Felder und für die Materie sein, und das Gravitationsfeld sollte sich dagegen in einem ebenen Minkowski-Raum ausbreiten. Der Gedanke einer bimetrischen Gravitationstheorie wurde 1952/53 von Max Kohler aufgegriffen. Die Einführung einer zweiten Metrik führt auf die Differenz der Affinsymbole

$$\Gamma^i_{ik} - \bar{\Gamma}^i_{ik} = \rho^i_{ik} \quad (14)$$

wobei die überstrichenen Affinsymbole von den Ableitungen der Minkowski-Metrik geliefert werden. ρ^i_{ik} transformiert sich im Gegensatz zu (4) wie ein echter Tensor, ist daher eine echte Kraft und keine Scheinkraft, wie bei Einstein. Das Schwerfeld Γ^i_{ik} wird beim Übergang zu geodätischen Koordinaten, in (9), nicht forttransformiert, es wird nur in seinen Wirkungen durch Trägheitskräfte kompensiert. Und der Energie-Impulsdichte-Tensor der Gravitation t^i_k ist wieder eine lokalisierbare Größe.

Ähnlich versuchten Pirani (1962), Dehnen und Hönl (1964) das Bezugssystem vom Koordinatensystem zu lösen. Durch Projektion des metrischen Tensors g_{ik} in den lokalen Ruheraum der Beobachter gewinnt man die Metrik eines 3-dimensionalen, zum Vektorfeld der Vierergeschwindigkeit $u^\alpha(x)$ orthogonalen Erfahrungsraumes

$$\underline{g}_{ik} = g_{ik} - u_i u_k \quad (15)$$

Man gelangt zur Formulierung eines allgemein-relativistischen Bewegungsgesetzes für Probmassen im Führungsfeld, welches die Einführung von „Kräften“ in die allgemeine

Relativitätstheorie, im Sinne der Newton-Lagrangeschen Dynamik, wie bei Rosen und Kohler, gestattet. Der Energie-Impulsdichte-Tensor für das Gravitationsfeld hängt vom Beschleunigungszustand des Beobachters ab.

Einsteins Feldgleichungen gestatten globale kosmologische Untersuchungen, wenn die Materie der Galaxien als gleichförmig über den betrachteten Raum verteilt angesehen werden. Doch die Art, wie die Raum-Zeit-Geometrie mit der Materie-Verteilung verknüpft ist, störte selbst Einstein immer. Er war sich sehr bewußt, daß eine geometrische Darstellung des phänomenologischen Energie-Anteils noch für Gleichung (1), speziell für elementare Gravitationsquellen, also Teilchen, nachgeliefert werden müsse.

1920 hatte Einstein die Vorstellung, daß Elementarteilchen durch topologische oder metrische Singularitäten des Raumes repräsentiert werden. Die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen müßten dann aus der Geometrie des Raumes resultieren. 1938 gelang es Einstein, Infeld und Hoffmann, für den einfachen Fall von metrischen Singularitäten, die Mechanik und die Gravitationskräfte zwischen den den Singularitäten entsprechenden Teilchen herzuleiten. Die metrischen Singularitäten lassen sich jedoch durch Deltafunktionen der Massendichte auf der rechten Seite von (1) ersetzen, und sind daher verkappte Inhomogenitäten der Feldgleichungen.

Andere Interpretationen von Teilchen führten Einstein und Rosen 1935 auf die topologisch fundierte und 1958 von Wheeler ausgearbeitete Geometrodynamik. In ihr wird der Dualismus zwischen Geometrie und den nicht geometrischen Feldern und Teilchen bereits auf der Basis der ART aufzuheben versucht, indem gewisse geometrische Modelle über elementare Teilchen den phänomenologischen Anteil der Feldgleichungen ersetzen. Es stellte sich heraus (Wheeler, de Witt, Regge, Treder u.a.), daß die Annahme aufgegeben werden muß, daß für jeden Punkt der Raum-Zeit im Infinitesimalen näherungsweise die SRT angenommen werden darf. Denn die Quantelung der Gravitationsfelder führt zur Existenz einer kleinsten Länge, unter der keine direkten Messungen mehr erhalten werden können. Diese Fundamentallänge ist die Plancksche Elementarlänge l :

$$l = \sqrt{\frac{\hbar \gamma}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ cm} \quad (16)$$

(Wenn ein Objekt mit Planckschem Durchmesser so groß wie ein Nukleon wäre, dann müßte das Nukleon im Vergleich mindestens so groß wie die Erde sein.)

Die Feldgleichungen (1) sind noch zu einfach strukturiert, um eine allgemeine Geometrisierung sämtlicher Felder und die Herleitung von Teilchen aus der Geometrie zu ermöglichen.

3. Versuche der Geometrisierung sämtlicher Wechselwirkungsfelder

In den Ansätzen zur einheitlichen Feldtheorie wurde versucht, dem Raum auch lokal reichhaltigere Strukturen zuzuschreiben, als sie die Riemannsche Geometrie enthält.

1921 machte Kaluza den Vorschlag, die ART so zu modifizieren, daß in dieser das Gravitationsfeld mit dem elektromagnetischen Feld vereinigt wird, indem neben der Raumzeit R_4 eine weitere Koordinate x_5 eingeführt wird. Die zusätzlichen metrischen Koeffizienten erwiesen sich als gleichwertig mit einer projektiven Mannigfaltigkeit im R_4 . Die projektiven Koordinaten der Weltpunkte liefern dabei ein Vektor- und ein skalares Feld. Offen blieb, was

die 5. Dimension sein sollte. Oskar Klein zeigte (1926), daß die 5. Dimension nicht in Erscheinung zu treten bräuchte, wenn sie in sehr kleinen Raumbereichen „engerollt“ wäre. Theorien, in denen versucht wird, physikalische Grundkräfte innerhalb eines quantenmechanischen Rahmens in einem höheren als der 4-dimensionalen Raum-Zeit zu vereinheitlichen, heißen Kaluza-Klein-Theorien. (Veilchen (1933), van Dantzig (1955), Schouten (1954), Pauli (1963), Bergmann (1956), Jordan (1955), Thiry (1950) u.a.). Das auftretende Skalarfeld wurde versuchsweise als variable „Gravitationskonstante“ interpretiert.

In den 40er Jahren des 20. JH arbeiteten Einstein (1956) und Schrödinger (1943) mit einem unsymmetrischen metrischen Tensor $g_{ik} \neq g_{ki}$, der 16 verschiedene Komponenten besaß. Der symmetrische metrische Tensor wurde wieder als Gravitationspotential aufgefaßt. Der nicht-symmetrische metrische Tensor sollte das elektro-magnetische Feld wiedergeben. Die Lösungen von Bonnor (1954) lieferten allerdings magnetische Monopole ohne Masse und andere nicht in der Natur vorkommende Objekte. Danach versuchte Einstein die Metrik noch allgemeiner anzusetzen, nämlich aus einem hermiteschen Anteil und einem nicht-hermiteschen (nicht-symmetrischen und komplexen) Anteil. Die Lösungen von Hlavaty (1952) und Tonnelat (1955) waren physikalisch nicht zu interpretieren.

Lange Zeit wurden Versuche zur Vereinheitlichung der Kräfte durch Hinzunahme von kompaktifizierten Koordinaten nicht weiter verfolgt, weil in Theorien mit Anspruch auf Realitätsnähe auch schwache und starke Kräfte mitberücksichtigt werden müssen. Als schwache Wechselwirkung wird der β -Zerfall bezeichnet, in dem ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Neutrino zerfällt. Die Frage, ob die starke Wechselwirkung, die für den Zusammenhalt der Quarks in Mesonen und Baryonen verantwortlich gemacht wird, überhaupt existiert, oder ob Quarks, wie Heisenberg meinte, Eigenschaften einer Innenstruktur bereits elementarer Teilchen darstellen, ist nicht völlig unbegründet. Im Standardmodell wird angenommen, daß Quarks von Gluonen zusammengehalten werden, und daß sich Quarks in Leptonen umwandeln können. Die postulierten Wechselwirkungsteilchen, die Higgs-Bosonen, wurden aber bisher noch nicht entdeckt.

Ein Beispiel dafür, wie Kernkräfte und Gravitation in geometrischer Weise vereinigt werden können, ist die Theorie von Hehl und Datta (1971). Der Strukturteil in den Feldgleichungen (1) wird in dieser Theorie in der Riemann-Cartan-Geometrie angesetzt, in der neben der Raumkrümmung eine Torsion auftritt. Der Torsionstensor nach Cartan S^l_{ik} ist die Differenz nicht-symmetrischer Affintensoren:

$$S^l_{ik} = \frac{1}{2} (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}) \quad \text{und} \quad (17)$$

$$\Gamma^l_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} l \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + S^l_{ik} - S^l_{ki} + S^l_{ik} \quad (18)$$

Der materiefreie Raum soll Minkowski-Struktur besitzen. Impuls- und Spin-Drehimpulsdichten sind Quellen von metrischen und Torsionsfeldern. Durch Einführen der Wirkungsfunktion des Dirac-Teilchens, das mit einem Gravitationsfeld wechselwirkt, werden Feldgleichungen hergeleitet, die nach Eliminierung der Verzerrung in der Dirac-Gleichung auf die nichtlineare Spinorgleichung vom Heisenberg-Pauli-Typ führen.

Im gleichen Jahr versuchten Isham, Salam und Strathdee die Quellen der Gravitation durch stark wechselwirkende Gravitationsfelder zu beschreiben. In dieser allgemein kovarianten Theorie tritt neben dem gewöhnlichen g_{ik} -Feld ein zweiter metrischer Tensor $f_{\mu\nu}$ auf, der das

massive Mesonenfeld mit dem Spin 2 beschreiben soll. Das g_{ik} -Feld ist nur an leptonische, das f_{ik} -Feld nur an hadronische Materie gekoppelt.

Ein Mischungsterm zwischen g und f bewirkt, daß das g -Feld direkt über das f -Feld mit hadronischer Materie wechselwirkt. Die Kopplungskonstante des f -Feldes ist 10^{38} mal so groß wie die Newtonsche Gravitationskonstante und hat eine Reichweite von nur rund 10^{-14} cm. Sivaram und Sinha konnten (1974) mit dieser f - g Theorie die Teilchen-Eigenschaften Spin, Baryonen-Zahl, Strangeness und Isospin, sowie einige Elementarteilchenmassen berechnen. Zur Lösung wird nicht (12), sondern die Kerr-Metrik verwendet, die das Gravitationsfeld eines rotierenden Körpers beschreibt, sowie die Carter-Metrik, welche für das Feld eines rotierenden elektrisch geladenen Körpers gilt.

Die ART ist ein Versuch, weitreichende Felder und global verteilte Materie durch die Geometrie der Raum-Zeit einheitlich zu beschreiben. Sollen auch Gravitationsfelder einzelner Teilchen geometrisiert werden, oder das Verhalten starker Gravitationsfelder in kleinsten Raumbereichen (um Singularitäten) untersucht werden, dann müssen die experimentell gewonnenen Erkenntnisse und deren theoretisches Verständnis durch die Quantentheorie berücksichtigt werden. Während in der ART die Raum-Zeit die Arene unserer Erfahrung ist, gibt es in der Quantenmechanik keine Punkte und von ihnen aufgespannte anschauliche Räume. Zur Beschreibung der Teilchenzustände werden stattdessen Wahrscheinlichkeitsamplituden verwendet, die in einem fiktiven, unendlich-dimensionalen komplexen Kontinuum des Hilbert-Raumes definiert werden. Die Raum-Zeit entspricht dem klassischen Bild, das wir uns von der Welt machen. Aber die Teilchenphysik ist auf die Beschreibung der Zustände im Hilbert-Raum angewiesen. Die Unmöglichkeit, physikalisch beobachtbare Größen gleichzeitig genau zu bestimmen und damit eindeutige Vorhersagen für das künftige Verhalten zu machen, führt dazu, daß das Konzept von Punkten in der Geometrie aufgegeben werden muß. Der Gegenwartspunkt des Lichtkegels der SRT ist in Raum und Zeit verschmiert.

Jeder Versuch, die ART in Analogie zum elektromagnetischen Feld eines Elektrons zu quantisieren, ist erfolglos geblieben, weil das Gravitationsfeld kovariant, also Teil der Geometrie, und stark nichtlinear ist und daher nicht als linear mit kleinen Störungen behandelt werden kann. In allen Fällen treten unendlich hohe Feldstärken auf, die nicht durch Renormierungsverfahren beseitigt werden können.

Wenn Energie, Impuls und Aufenthaltsorte in kleinsten Bereichen unbestimmt sind, müßte die ART erst halb-klassisch für kleine Raumbereiche präpariert werden. Es müssen neue Geometrien, anders als die Riemannsche, entwickelt werden. In der Twistor-Theorie von Penrose (1975) (Hughston und Ward 1979) treten beispielsweise keine Punkte mehr auf. Jedem Lichtkegel wird ein System von Twistoren zugeordnet, wobei die Geodäten an den Nullkegel fixiert bleiben. (Da die Richtung eines Nullvektors oder einer Geodäten in einem gekrümmten Raum verdreht (twisted) sein kann, heißen die Elemente Twistoren). Twistoren werden interpretiert als Objekte in einem komplexen (6-dimensionalen) Minkowski-Raum, in dem alle Punkte durch komplexe Koordinaten definiert werden. Die Dreidimensionalität des Raumes und die Notwendigkeit der komplexen Zahlen als Ausdruck für Wahrscheinlichkeits-Amplituden sind durch den lokalen Isomorphismus, d.h. durch die umkehrbar eindeutige Abbildung der Gruppe aller unitären Spin-Matrizen, der Isospin-Gruppe $SU(2)$, auf die 3-dimensionale Drehgruppe, der Lorentzgruppe $SO(3)$, gegeben. Es besteht also eine Korrespondenz zwischen der Raum-Zeit-Geometrie der Relativität und der holomorphen (d.h. der komplex analytischen) Geometrie. Der Kontinuumsbegriff wird eliminiert und durch kombinatorische Prozesse und Zahlen ersetzt. Penrose geht von der Theorie der Spin-Netze

aus, in welcher die Welt durch Kombinationen von Netzen aufgebaut wird, wobei jeder Linienabschnitt ein Objekt mit dem Gesamtdrehimpuls $n/2 \hbar$ darstellt. N numeriert dabei die als Weltlinien von Teilchen aufgefaßten Linienelemente.

Auch die Arbeitsgruppe um Abhay Ashtekar, die von den Arbeiten der Gruppe um Penrose inspiriert wurde, vermeidet Punkte in der Geometrie (1993). In der „Methode der neuen Variablen“ werden geometrische Ausdrücke als Vielfache von kleinsten Flächen mit der Planckschen Länge l als Seitenlängen umgeschrieben.

4. Geometrische Beschreibung materieller Quellen und Felder mithilfe kompaktifizierter Weltkoordinaten (Stringtheorie)

Völlig anderer Meinung sind die Stringtheoretiker, die in Bereichen der Planckschen Länge schwingende Objekte (Strings) ansiedeln und hoffen, daß dadurch Teilchenmassen beschrieben werden können, die umgekehrt proportional zur Länge des schwingenden Strings oder dessen Oberwellen sind. Ausgangspunkt ist eine supersymmetrisch erweiterte Geometrie. Die Quantengeometrie der Stringtheorie soll die Riemannsche Geometrie im Planck-Bereich ersetzen. Der Stringtheorie liegen folgende Überlegungen zugrunde:

In der ART gilt die Symmetriegruppe der Drehinvarianz. 1971 wurde entdeckt, daß die Naturgesetze noch gegenüber einer weiteren Symmetriegruppe invariant sein müßten, wenn der Spin mit der Raum-Zeit verknüpft wird. Das führte auf die Supersymmetrie. Die kartesischen Koordinaten der Raum-Zeit werden durch neue „Quantenkoordinaten“ u und v mit antikommutativen Eigenschaften (Grassmann-Algebra) ersetzt: *ergänzt*

$$u \times v = -v \times u \quad (19)$$

Supersymmetrie läßt sich dann als Translation in der quantenmechanisch erweiterten Form der Raum-Zeit verstehen. Nach dem Paulischen Ausschließlichkeitsprinzip können zwei Fermionen (alle Teilchen mit Spin $1/2$) nicht denselben Platz belegen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei Fermionen am selben Ort zu finden, ist $f \times f = 0$ (eine Eigenschaft antikommutierender Zahlen bzw. Majorana-Spinore: $f - if$). Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei Bosonen (Teilchen mit geradzahligem Spin, z.B. Photonen) am gleichen Ort zu finden, $b \times b > 0$ (wie für gewöhnliche Zahlen). Supersymmetrie-Transformationen verbinden die Felder b (Bosonen) und f (Fermionen) mit den neuen Feldern u und v :

$$u \rightarrow b + \epsilon f \quad (20)$$

$$v \rightarrow f + \epsilon b \quad (21)$$

wobei ϵ der Phasenwinkel ist, der die Rotation des Superteilchens im Superraum angibt. (ϵ und f sind antikommutierende Zahlen). Wenn zwei Bosonen durch Supersymmetrie-Rotation in Fermionen transformiert werden, muß die Wahrscheinlichkeit dafür, sie am selben Ort zu finden, Null werden:

$$(u \times v) = (b + \epsilon f) \times (f + \epsilon b) = 0 \quad (22)$$

Das ist durch die Bedingung (20) und $\epsilon \times \epsilon = 0$ der Grassmann-Algebra erfüllt. Diese Algebra ermöglicht es, kommutierende und antikommutierende Zahlen in einem einzigen hyperkomplexen Zahlensystem auf der klassischen Ebene zu kombinieren.

Um eine lokale Supersymmetrie zu bekommen, muß ein Eichfeld für jede der in einer Gleichung auftretenden Symmetrien eingeführt werden. Wiederholte Anwendung der Fermion-

Boson-Transformation bewegt ein Teilchen von einem Punkt der Raum-Zeit zum anderen und entspricht einer Poincaré-Transformation, für die das Eichteilchen das Spin-2-Boson, das Graviton als Austauschteilchen der Gravitation ist. Daher wird die Supersymmetrie gewöhnlich auch als Supergravitation bezeichnet. Die Supergravitation beschreibt die ART in der Sprache der Quantentheorie, d.h. als Austausch von Quanten.

Um die Supersymmetrie geometrisch herzuleiten, was hier nur angedeutet werden soll, wird die Raum-Zeit erweitert um 4 zusätzliche Koordinaten, die antikommutierenden Zahlen sind θ^α ($\alpha = 5, 6, 7, 8$). (Cremmer, Julia (1976) und Scherk (1978)) Der normale Raum wird zum 8-dimensionalen supersymmetrischen Raum mit den Koordinaten z^A ($A = 1, \dots, 8$), wobei die ersten 4 Koordinaten Bosonen-Koordinaten x^m ($m = 1, \dots, 4$) und die letzten Koordinaten θ^a Fermionen-Koordinaten sind: $z^A = (x^m, \theta^a)$

Nath hat (1976) die ART in den Superraum umgeschrieben, d.h. in eine Riemannsche Geometrie im 8-dimensionalen Raum mit Grassmann-Koordinaten. Das Linienelement im Superraum ist beispielsweise

$$ds^2 = dz^A g_{AB}(z) dz^B \quad (23)$$

g_{AB} ist das grundlegende Eichfeld der Theorie. Da die Indizes entweder bosonisch oder fermionisch sein können, gibt es drei unabhängige Sektoren:

Boson-Boson-Sektor: $g_{ik}(z) = g_{ki}(z)$
 Boson-Fermion-Sektor: $g_{ia}(z) = -g_{ai}(z)$
 Fermion-Fermion-Sektor: $g_{ab}(z) = -g_{ba}(z)$

Die Superfeld-Erweiterung des metrischen Tensors $g_{AB}(z)$ enthält zusätzlich zum Gravitationspotential $g_{ik}(x)$ zusätzliche Felder, Skalare, Maxwell-, Dirac- und andere Felder. Fermionen sind in der Supergravitation von Anfang an in der Theorie enthalten und müssen nicht, wie in der ART hinzugefügt werden.

In der Supersymmetrie treten Bosonen und Fermionen immer paarweise auf, wobei sich die Superpartner jeweils um den Spin $\frac{1}{2}$ voneinander unterscheiden. Bei Anwendung der supersymmetrischen Operation auf das Gravitationsfeld mit dem Spin-2-Boson tritt das Gravitino mit Spin $3/2$ als Fermionpartner auf. Superpartnerteilchen sollen sehr große Massen besitzen (10^3 mal schwerer als Protonen). Aber keines der vorhergesagten Teilchen konnte bisher gefunden werden. Teilchen mit größerem Spin sollen Massen besitzen, die ein Vielfaches der Planck-Masse (10^{19} Protonenmassen bzw. 10^{-5} Gramm) sind.

Es gibt mehrere Ansätze zu Supergravitationstheorien. Diese lassen sich durch die Anzahl N unterschiedlicher Boson-Fermion-Transformationen klassifizieren. N entspricht der Zahl von Spin-3/2-Gravitinos, die in die betreffende Theorie eingehen. Die meisten Teilchen enthält die $N(8)$ -Theorie (70 Skalare, 56 Fermionen, 28 Bosonen, 8 Gravitinos). Die vorteilhafteste Dimension für diese Theorie ist 11. Allerdings läßt sich die Chiralität (die Händigkeit) nicht in einer Raumzeit mit geradzahligem Orts-Dimensionen und einer Zeit-Dimension unterbringen.

1984 wurde die 10-dimensionale Supergravitationstheorie als niederenergetische Erscheinungsform der Stringtheorie behandelt. Die String-Theorie wurde in den 60er Jahren des 20. Jahrhunderts eingeführt, um die Bindung der Quarks verstehen zu können. Strings sind eindimensionale schwingende Saiten, die zunächst Bosonen sein sollten. (Schwarz 1985)

Scherk und Schwarz stellten eine String-Theorie auch für Fermionen auf (1974). Dabei trat ein masseloses Spin-2-Teilchen auf, das als Graviton aufgefaßt wurde und auf die mögliche Vereinigung mit der ART hindeutete. Die Superstringtheorie ist eine Stringtheorie mit Supersymmetrie.

Ursprünglich mußte der Raum 25 Dimensionen zur Beschreibung der Bosonen haben, was mit der Zeit ein 26-dimensionales Kontinuum erforderte. In der Theorie zur Definition von Fermionen sind 10 Dimensionen nötig, anderenfalls ist die Theorie mathematisch nicht konsistent, bzw. würde sie Unendlichkeitsstellen aufweisen. Die heterotische Stringtheorie ist eine Kombination aus beiden Theorien. Sie ist eine Gravitationstheorie, in der sowohl die Materieteilchen als auch Naturkräfte geometrisch gedeutet werden. Ein String ist eine Schlinge in vier Raum-Zeit-Dimensionen mit möglichen Verwindungen in den zusätzlichen Dimensionen. Jede Schwingungsfrequenz entspricht der Masse und Ladung eines Teilchens oder einer Teilchengruppe.

Die zusätzlichen Dimensionen werden nach der Methode von Kaluza (1921) und Klein (1926) auf Bereiche der Planckschen Länge eingerollt oder kompaktifiziert. Die kompaktifizierten Dimensionen führen zu einer unendlich großen Zahl von Teilchen in der Supergravitationstheorie. Die Wechselwirkung zwischen Strings wird durch Teilung und Vereinigung von Strings ausgedrückt.

Die Supersymmetrie kann der Stringtheorie in 5 verschiedene Weisen einverleibt werden. Daher gab es in den 80er Jahren fünf verschiedene Stringtheorien, von denen jede eine eigene Kopplungskonstante besaß. Erst 1995 erkannte Witten, daß alle 5 Stringtheorien bei Hinzunahme einer weiteren Theorie, der 11-dimensionalen Supergravitation, in der „M-Theorie“ vereinigt werden können. (Witten 1997) (Im 10-dimensionalen Universum sind die 1-dimensionalen Strings als Approximationen 2-dimensionaler Membranen in 11 Dimensionen aufzufassen). Es zeigte sich beispielsweise, daß die O-heterotische Stringtheorie mit kleiner Kopplungskonstante identisch ist mit der Typ I-Theorie mit einer Kopplungskonstante, deren Wert größer als 1 ist. Die Methoden der Störungsrechnung sind nur auf Theorien mit Kopplungskonstanten kleiner als 1 anwendbar. Die Entdeckung dieser Dualität läßt vermuten, daß auch die übrigen drei Theorien dualen Charakter haben, und sich gegenseitig ineinander überführen lassen. Die Theorie vom Typ IIB ist selbstdual (d.h. die Aussagen der Physik in dieser Theorie mit großer Kopplungskonstante sind identisch mit denen, die sie bei der Theorie mit einer zur ersten reziproken Kopplungskonstanten haben).

Die M-Theorie ist eine lokale Theorie, d.h. die Kausalität bleibt erhalten und Wechselwirkungen finden in einem Punkt statt. Die mathematischen Strukturen dieser Superstringtheorie sind Topologie, Homotopie, Kohomologie, Riemannsche Flächen, Lie-Algebra, Calabi-Yau- und Moduli- Räume.

Supersymmetrische Theorien (Dimopoulos und Giudice 1996) sowie String- und Superstringtheorien sagen Wechselwirkungen voraus, die das schwache Äquivalenzprinzip (die Universalität des freien Falls) und die Newtonsche Gravitationsanziehung verletzen (Damour und Polyakov 1994)(Lazarides, Panagiotakopoulos und Shafi 1986), weil in diesen Theorien beispielsweise die gravitative Wechselwirkung von der Baryonenanzahl eines Körpers abhängt und Yukawa-artige Anteile zum Gravitationspotential hinzutreten. Das widerspricht der Beobachtung.

Die Superstringtheorie scheint alle Möglichkeiten zu einer einheitlichen geometrischen Beschreibung der vier Wechselwirkungen und Elementarteilchen in sich zu schließen. Doch fehlen ihr bisher die geometrischen Grundlagen. Es ist unklar, wie sechs Dimensionen kompaktifiziert werden müssen. Es gibt beliebig viele Möglichkeiten, die höheren Dimensionen einzurollen. Aber Anzahl und Natur der Teilchen hängen von der Art ab, wie diese kompaktifiziert werden. Ein echter Vergleich mit Experimenten ist bisher nicht möglich gewesen, da keine Möglichkeit besteht, Massen und Wechselwirkungskonstanten aus der Theorie herzuleiten.

Es wird nicht erklärt, warum die Gravitation nicht mit der Vakuumenergie wechselwirkt. Wegen der auf kleinstem Raum aufgewickelten Dimensionen sollte die Krümmung der Raum-Zeit ebenfalls sehr groß sein. Diese Krümmung kann durch Einfügen der kosmologischen Konstante λ in Gleichung (1) aufgehoben werden. (Einstein hatte sie eingeführt, um ein statisches Universum sicher zu stellen, bis die Theorie der Expansion durch Friedman und dessen Bestätigung durch Hubble das Glied überflüssig machten). Die Krümmung der Raum-Zeit ist jedoch nicht nachweisbar. Aufgrund der Vakuumfluktuationen sollte sie aber 10^{120} mal stärker sein.

In der Superstringtheorie haben Strings die Größe des Planck-Durchmessers, weil sie auch in den darin aufgerollten Räumen höherer Dimensionen schwingen. Die Schwingungsfrequenzen werden mit Eigenschaften der Teilchen identifiziert. Allerdings haben Quarks bereits 10^{20} mal größere Durchmesser (und die Nukleonen sind wiederum 100mal größer als diese). Ob die Natur überhaupt den Weg geht und Dimensionen einrollt, ist durch keinen logischen Beweis begründet worden. Daher gelten die Ansätze bei einigen der bedeutendsten Theoretikern als verfehlt (Feynman (1989), Glashow (1986), Weinberg (1989) u.a.). Schlecht begründete physikalische Annahmen werden durch komplizierte mathematische Methoden zu immer phantastischeren Strukturen ausgebaut, die zwar mit Symmetrieforderungen an das Universum übereinzustimmen scheinen, aber keinerlei Bezug zur meßbaren Realität haben.

Die Struktur der ART ergab sich aus der tiefen Einsicht Einsteins in die Logik der physikalischen Gesetze. Dagegen fehlt in der Superstringtheorie ein generelles Verständnis von deren Logik.

5. Durchführung des von Einstein vorgeschlagenen Programms der vollständigen Geometrisierung materieller Letzteinheiten durch Burkhard Heim

Was Einstein sich erträumte, war eine geometrische Beschreibung der Natur mit allen Feldern und Teilchen aus einfachen Prinzipien. Sein Ansatz zur ART kam zu einer Zeit, als die Zusammensetzung des Atomkerns noch unbekannt war. Hätte er die Kenntnisse aus den 40er Jahren des vergangenen Jahrhunderts und die Ergebnisse der Quantentheorie wenigstens in einem halb-klassischen Ansatz berücksichtigt, dann wäre ihm vielleicht die geometrische Darstellung der Materie auch im Rahmen einer erweiterten Riemannschen Geometrie gelungen. Zusätzlich zu den der ART zugrunde liegenden Voraussetzungen:

1. Äquivalenzprinzip: Gleichheit von schwerer und träger Masse,
2. Naturgesetze lorentzinvariant (speziell kovariant) schreiben,
3. Verwendung der Riemannschen Geometrie, $\left\{ \begin{array}{l} \text{allgemein kovariant} \end{array} \right\}$

hätte sich Einstein noch von folgenden weiteren Voraussetzungen leiten lassen sollen:

4. Verwendung einer ganz allgemeinen Metrik (nicht-hermitesche und in so notwendig und

- [illegible]

Mit den oben genannten Prinzipien hat Burkhard Heim vor 50 Jahren begonnen, die von Einstein gesuchte einheitliche Feldtheorie aufzustellen. Tatsächlich gelingt die vollständige geometrische Beschreibung aller physikalischen Kräfte und Teilcheneigenschaften. 1982 wurde die entsprechende Massenformel für die Elementarteilchen beim DESY in Hamburg programmiert. Die theoretischen Ergebnisse weichen kaum von den experimentellen Werten ab. Bisher sind sämtliche registrierten Elementarteilchenmassen in Heim's Massenformel enthalten - auch drei Neutrino-Paare mit ihren geringen Massenwerten. Wenn sämtliche Ergebnisse dieser Theorie von anderen Physikern nachvollzogen worden sind, wird sich erweisen, daß es die gesuchte einheitliche Feldtheorie ist, denn sie ist bisher mit sämtlichen experimentellen Beobachtungen verträglich und sagt neue physikalische Wirkungen voraus. (Heim 1977, 1983)

Über die Voraussetzungen 4 bis 7 der Theorie hat Heim Anfang der 50er Jahre des letzten Jahrhunderts mit Václav Hlavatý in Princeton korrespondiert, der damals mit Einstein an dessen einheitlicher Feldtheorie arbeitete. (Hlavatý 1952) Heim verließ 1953 das MPI für Astrophysik in Göttingen, weil er aufgrund seiner schweren Behinderung und wegen des anderen Forschungsthemas im MPI ungestört an seiner Theorie arbeiten wollte.

t untersuchte, wie viele Dimensionen die
 n Energie-Impulsdichte-Tensors T_{ik} , der
 R_{ik} in Gleichung (1) ebenfalls eine
 n müßten durch Eigenwertgleichungen
 on Γ_{ik} eine Zustandsfunktion ψ_{ik} der
 ists gebildet werden kann. Aus den
 ator C_p hergeleitet, mit der Eigenschaft,
 metrischen Kontinuum zum Ricci-Tensor
 miteschen Operatoren C_p liegen sämtlich

im
 mit
 hand

fallen physikalische Aussagen
 was ist das für Zustände?
 was ist das für ein Zustandsraum?

$$C_{(p)} \psi^{(p)}_{ik} = \lambda_{(p)}(ik) \psi^{(p)}_{ik} \quad (24)$$

(Die Operatorgleichungen sind gliedweise erfüllt. Die Summenkonvention wird hier nicht angewendet, daher die Klammern um p).

Beim Übergang in den makroskopischen Bereich gehen diese Zustandsfunktionen über in die Verschiebungssymbole der infinitesimalen Analysis $\psi^l_{ik} \rightarrow \Gamma^l_{ik}$. Das ist nur möglich, wenn die Γ^l_{ik} als echte Tensoren behandelt werden. Das sind sie, wenn die Möglichkeit allgemeiner Koordinatentransformationen in (7) auf reguläre Affinitäten, d.h. lineare Transformationen, eingeschränkt wird. Damit läßt Heim nur mehr die spezielle Kovarianz gelten. Beim Übergang zum makroskopischen Bereich wird die Operatorwirkung $C_p \psi^p_{ik} \rightarrow R_{ik}$ zum Strukturtensor und die Punktspektren sind räumlichen Energiedichten T_{ik} wie in (1) direkt proportional:

$$\lambda_p(km) \psi^p_{ik} \rightarrow T_{ik} \quad (i,k = 1, \dots, 4) \quad (25)$$

Wegen der nichthermiteschen Struktur der $g_{ik} (\neq g^*_{ik})$ gibt es drei verschiedene Möglichkeiten zur Bildung von Matrixspuren bzw. Verjüngungen des Krümmungstensors R^l_{ikm} (im Gegensatz zur Riemannschen Geometrie). Für die Diskontinuität gilt dasselbe (wegen $R^l_{ikm} \rightarrow \lambda_m \psi^l_{ik}$).

Das System nichtlinearer Eigenwertgleichungen (24) liefert reelle Eigenwerte $\lambda_p = \lambda^*_p$. Da die drei Indizes i, k, l die Ziffern der R_4 -Dimensionen durchlaufen, existieren $4^3 = 64$ Strukturgleichungen (24). Sie bilden daher Elemente einer 8-reihigen Matrix, bzw. einen 8-dimensionalen Tensor. Da die Vektorkomponenten eines Tensors die Dimensionen eines Raumes definieren, in dem der Tensor existiert, ist die Welt notwendigerweise 8-dimensional.

Es zeigt sich, daß viele der Eigenwerte Null sind, solange der Operator C_p in (24) nichtlinear ist:

Wegen $\lambda_m(k,m) = 0$, $\lambda_m(m,k) = 0$, $\lambda_p(m,m) = 0$, sowie $\lambda_m(m,m) = 0$ bleiben $16 + (16 - 4) + (16 - 4) = 40$ Spektren leer. Der Energiedichtetensor T_α im R_8 hat folgende Komponenten:

$$T_{st} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} & 0 & 0 \\ 0.. & 0.. & 0.. & T_{54} & T_{55} & T_{56} & 0 & 0 \\ 0.. & 0.. & 0.. & T_{64} & T_{65} & T_{66} & 0 & 0 \\ 0.. & 0.. & 0.. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.. & 0.. & 0.. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Der Bau der T_α legt die Vermutung nahe, daß die Mengen der R_8 -Koordinaten in der Form $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5, x_6\}$, $\{x_7, x_8\}$ strukturiert sind, so daß vier nichteuklidische Unterraumstrukturen $R_8 = R_3 \cup T_1 \cup S_2 \cup I_2$ existieren, mit $R_3 \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $T_1 \equiv x_4$, $S_2 \equiv (x_5, x_6)$, $I_2 \equiv (x_7, x_8)$.

Da die Ränderung T_{5r} , T_{6r} , T_{r5} , und T_{r6} (mit $r = 1, \dots, 8$) leer ist, läßt sich das materielle Geschehen allein in einem R_6 darstellen. Von den 36 metrischen Strukturstufen im R_6 sind 24 von Null verschieden: $\lambda_{(p)}(ik) \psi^{(p)}_{ik} \neq 0$, und phänomenologisch Energiedichten äquivalent, die



