

Räumlicher Verlauf der Gravitation.

Symbole:

c = Lichtgeschwindigkeit	λ = Comptonwellenlänge, welche entstehen würde wenn ein Atom m völlig zerstrahlt und die Energie $m c^2$ nur ein Quant bilden würde
h = Wirkungsquant	
γ = Newton'sche Gravitationskonstante	φ = gravitatives Geschwindigkeitsniveau, dessen Newton'sche Näherung $\varphi_n = \frac{\gamma M}{r}$ ist
r = räumlicher Abstand vom Gravitationszentrum	g = Betrag der Beschleunigung im Gravitationsfeld
M = makromare Masse der gravitativen Feldquelle	g_n = Newton'sche Näherung von g
m = Masse der M aufbauenden Atome	D = Atomgewicht von m
L = Zahl dieser Atome in M	m_n = Nukleonenmasse, also $m \approx D m_n$

Alle Größen werden in Kg, m, sec = System ausgedrückt.

Voraussetzung.

Die Masse $M = L m$ erzeuge das statische Feld φ , welches keine Störung erfahren soll und zeitlich konstant ist. In diesem Fall wird $\varphi(r)$ kugelsymmetrisch und sein räumlicher Verlauf wird nach einer makromaren Approximation der einheitlichen Feldgleichungen beschrieben durch

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{3}{2} c^2 \frac{c^2 \lambda^2 + \gamma h r}{c^2 \lambda^2 - \gamma h r} \left(r \frac{d\varphi}{dr} + \varphi \frac{c^2 \lambda^2 + \gamma h r}{c^2 \lambda^2 - \gamma h r} \right) =$$

Lösung des Gravitationsgesetzes.

Kürzungen: $\varphi = \frac{c^2 \lambda^2}{\gamma h r}$ und $F(r) = \frac{c^2 \lambda^2 + \gamma h r}{c^2 \lambda^2 - \gamma h r} = \frac{1 + \frac{r}{\varphi}}{1 - \frac{r}{\varphi}}$,

also

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + \frac{3}{2} c^2 F(r) \left(r \frac{d\varphi}{dr} + F(r) \varphi \right) = 0.$$

Substitution:

$$\eta = \frac{3}{8c^2} \varphi \text{ folglich } r^2 \left(\frac{d\eta}{dr} \right)^2 + 4 F(r) \left(r \frac{d\eta}{dr} + F(r) \eta \right) = 0$$

Fortsetzung Blatt

Wegen $r \frac{d\eta}{dr} = \frac{d\eta}{d \ln r} = \eta'$ neues Argument $\ln r$ eingeführt.

Homogenisierte Form $\eta'^2 + 4F\eta' + 4F^2\eta = 0$ als quadratische Gleichung in η' . Ihre Lösungen sind $\eta' = -2F(1 \pm \sqrt{1-\eta})$.

Integration:

Mit $Q = 1 \pm \sqrt{1-\eta}$, also $\eta = 1 - (Q-1)^2 = Q(2-Q)$
oder $d\eta = 2(1-Q)dQ$ wird $-F d \ln r = \frac{1}{Q}(1-Q)dQ =$
 $= d \ln Q - dQ = d \ln (Q e^{-Q})$.

Ferner wird mit $x = \frac{r}{Q}$ und $u = 2x - 1$ dieses Differential
zu $d \ln(Q e^{-Q}) = -F d \ln r = -\frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x} = -4 \frac{1+x}{1-(2x-1)^2} dx$
 $= -\frac{3+u}{1-u^2} du = -\left(3 d \operatorname{ARTG} u - \frac{1}{2} d \ln(1-u^2)\right) =$
 $= -\frac{1}{2} d \ln \frac{(1+u)^2}{(1-u)^4} = d \ln \frac{(1-u)^2}{1+u},$

also $d \ln (Q e^{-Q}) = d \ln \frac{(1-u)^2}{1+u}.$

Mit Integrationskonstante $C = \frac{\ln A}{2Q}$ sowie $u = 2x - 1$ und
 $x = \frac{r}{Q}$ gilt daher als zweideutige Lösung, wenn nach der In=
tegration potenziert wird, $r Q e^{-Q} = A (1 - \frac{r}{Q})^2$ mit
 $Q = 1 \pm \sqrt{1-\eta}$, sowie $\eta = \frac{3\phi}{8c^2}$ und $Q = \frac{e^{\phi} \lambda^2}{\gamma h} = \frac{h^2}{\gamma m}$,
wenn die Comptonwellenlänge $\lambda = \frac{h}{mc}$ verwendet wird.

Bedingungen der Newton'schen
Näherung $\phi = \phi_n$:

Feldquelle $M = \text{Im Kontinuum } L \rightarrow \infty, M \rightarrow 0$. Auch $h \rightarrow \infty$
also $Q = \frac{h^2}{\gamma m} \rightarrow \infty$ in 5. Ordnung. Außerdem $\left(\frac{3\phi_n}{8c^2}\right)^{\nu} = 0$ für
 $\nu > 1$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_n = 0$. Für den positiven Zweig $Q = \underline{Q} =$
 $= 1 + \sqrt{1 - \frac{3\phi_n}{8c^2}}$ folgt dann nach Reihenentwicklungen
 $e^{\frac{A}{r}} = \left(2 - \frac{3\phi_n}{16c^2}\right)\left(1 + \frac{3\phi_n}{16c^2}\right) \approx 2 + \frac{3\phi_n}{16c^2}$, d.h., in diesem
Fall genügt ϕ_n nicht $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_n = 0$, sodaß der positive Zweig $\underline{Q}$
keine physikalische Bedeutung hat. Für den negativen Zweig
 $Q = \bar{Q} = 1 - \sqrt{1 - \frac{3\phi_n}{8c^2}}$ folgt dagegen in dieser Approximation
 $\frac{3\phi_n}{16c^2} = \frac{A}{r}$, was $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_n = 0$ genügt. Damit ist die Lösung
eindeutig mit $Q = \bar{Q}$ und Einsetzen von $\phi_n = \frac{\gamma M}{r}$ liefert
für die Integrationskonstanten $A = \frac{3\gamma M}{16c^2}$.

Für die physikalische Lösung gilt also

$$\left| \begin{array}{l} r q e^{-q} = A \left(1 - \frac{r}{\varrho} \right)^2, \quad q = 1 - \sqrt{1 - \frac{3}{8c^2} \varphi} \\ A = \frac{3}{16} \frac{M}{c^2}, \quad \varrho = \frac{h^2}{\gamma m} \end{array} \right|$$

Eigenschaften der Lösung.

Für alle r ist $\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)^2$ als ^{Quantenzahl} reell und positiv, sodaß dies auch wegen $A > 0$ für $r q e^{-q}$ gelten muß. Dies bedeutet aber $\varphi(r) \geq 0$ für alle r . Nur für $r = \varrho$ wird $q e^{-q} = 0$, also $q = 0$, was nur für $\varphi(\varrho) = 0$ möglich ist.

Differentiation der Lösung nach r ergibt mit $g = \frac{d\varphi}{dr}$ eine Beziehung für g , nämlich $g = g_n e^q \left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)$ mit $g_n = -\frac{\gamma M}{r^2}$. Für $r < \varrho$ ist $g < 0$ ein Attraktionsfeld $\varphi(r) > 0$, dagegen wird für $r = \varrho$ stetig $g(\varrho) = 0$ mit $\varphi(\varrho) = 0$, ^{aber} $g > 0$ mit $\varphi > 0$ für $r > \varrho$.

Dieses Feld einer gravitativen Abstossung jenseits ϱ ist wegen $g = \frac{\gamma M}{\varrho^2} - \frac{\gamma M}{r^2}$ sehr schwach und nähert sich für $r \rightarrow \infty$ dem konstanten Wert $\frac{\gamma M}{\varrho^2}$. Die Fläche $r = \varrho$ ist demnach eine durch die atomare Struktur der Feldquelle bestimmte makromare Grenze des attraktiven Gravitationsfeldes im Raum.

Aus $\varrho = \frac{h^2}{\gamma m}$ folgt mit $m \approx D m_n$ nach Einsetzen der Naturkonstanten h, γ und m_n zur Abschätzung von Gravitationsgrenzen nach einer Umrechnung in Megaparsec

$$\left| D' \varrho \approx 52 \text{ [MPc]} \right|$$

Mit einem mittleren Atomgewicht der Spiralnebel zwischen 1,5 und 2 folgt, daß die Gravitationsgrenzen der Spiralnebel zwischen 20×10^6 und 80×10^6 Lichtjahren liegen können.