Informatik

Tim Florian Jaeger

Fuzzy Logic - Klassische und Fuzzy-Mengenlehre

Zusammenfassung

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Impressum:

ISBN: 9783638109550

Dieses Buch bei GRIN:

https://www.grin.com/document/1543

Tim Florian Jaeger

Fuzzy Logic - Klassische und Fuzzy-Mengenlehre

GRIN Verlag

Klassische & Fuzzy Mengenlehre

Für das PS, Fuzzy Methoden

Autor : Florian Jaeger

Klassische & Fuzzy Mengenlehre

Zusammenfassung der S. 4-14 aus
G. J. Klir / T.A. Folger (1992):

Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information

Übersicht

- Terminologie
- Auffrischung der Mengentheoretischen Grundlagen
  - Charakteristische Funktion
- Einführung in die Theorie der Fuzzy Mengen
  - Zugehörigkeitsfunktion
  - Induktiver Aufbau

Terminologie

- Großbuchstaben stehen für Mengen
  - A, B, C,.....
- X ist die universelle Menge (i.A. endlich)
- Ø ist die leere Menge
- R^n ist eine oft benutze universelle Menge

Definitionen - Mengen

- Mengen werden wie folgt beschrieben:
  - Extensional: $A=\{a_1, a_2, .., a_n\}$
  - Intensional: $B=\{b \mid b$ has prop. $P_1, .., P_n\}$
- Mengen enthalten Elemente
  - Elemente von Mengen können selbst wieder Mengen sein.
  - Induktiver Aufbau von Mengen der n-ten Ebene

Relationen

- Binäre Relationen zwischen Mengen
  - Inklusion: $A \subseteq B$
  - Echte Inklusion: $A \subset B$
  - Gleichheit: $A = B$ ($A \subseteq B$ und $B \subseteq A$)
  - Ungleichheit: $A \neq B$

Operationen 1

- (hier) zwischen Mengen gleicher Ebene
  - Asymmetrische Subtraktion: A - B
  - Symmetrische Subtraktion: A Δ B
  - Komplement
  - Vereinigung Durchschnitt

Operationen 2

- können in Mengen einer anderen Ebene resultieren
  - z.B. Potenzmengenbildung
- Unäre oder mehrstellige Operationen
- Abkürzende Schreibweisen
  - Generalisierung der Vereinigung und des Durchschnitts

Operationen - Gesetze

Involution	$\overline{\overline{A}} = A$
Commutativity	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativity	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivity	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotence	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Absorption of complement	$A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
Absorption by X and $\varnothing$	$A \cup X = X$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Identity	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap X = A$
Law of contradiction	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
Law of excluded middle	$A \cup \overline{A} = X$
DeMorgan's laws	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Konvexe Mengen

- Eine Menge $A \subseteq R^n$ ist konvex, wenn
  - Für alle $a,b \in A$ (a,b sind n-dim. Vektoren) Alle Punkte c auf der Geraden, die durch a und b geht:
  - $c \in A$

Charakteristische Funktion

- bildet alle Elemente der universellen Menge X auf die Menge {0,1} ab.
  - $\mu_A : X \rightarrow \{0,1\}$
  - $\mu_A (x) = 1$, wenn x in A enthalten
  - $\mu_A (x) = 0$, wenn x nicht in A enthalten

Übersicht

- Terminologie
- Auffrischung der Mengentheoretischen Grundlagen
  - Charakteristische Funktion
- Einführung in die Theorie der Fuzzy Mengen
  - Zugehörigkeitsfunktion
  - Induktiver Aufbau

Fuzzy Mengen

- Idee:
  - Elemente können nicht nur zu einer Menge gehören oder nicht.
  - Elemente gehören mit einem gewissen Grad zu einer Menge.
  - Der Charakteristischen Funktion entspricht die Zugehörigkeitsfunktion.

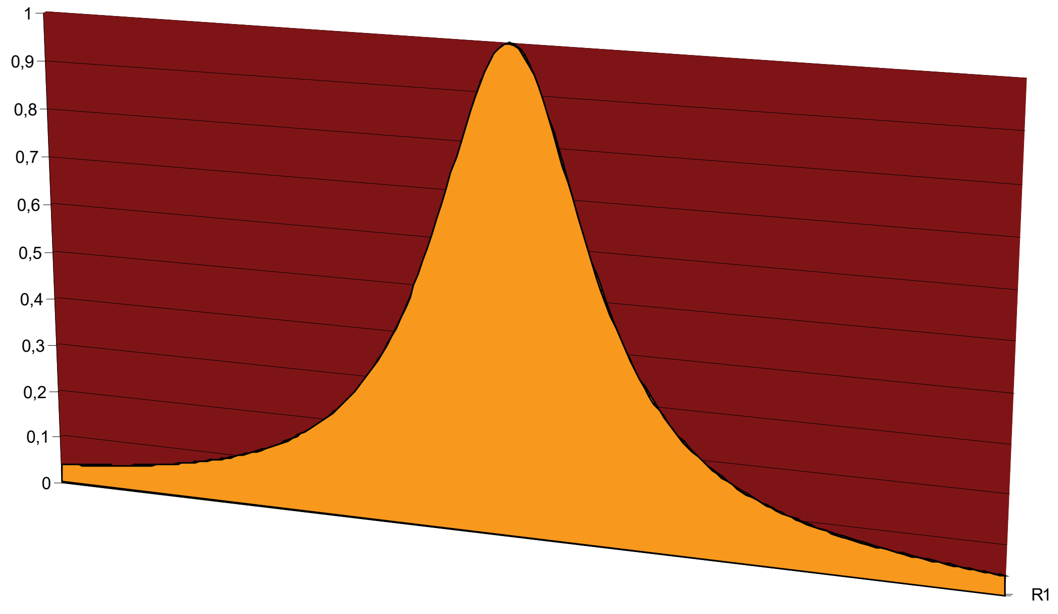
Zugehörigkeitsfunktion

- bildet alle Elemente der universellen Menge X auf das Intervall [0,1] ab.
  - $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$
  - $\mu_A (x) = 1$, wenn x in A enthalten
  - $\mu_A (x) = 0$, wenn x nicht in A enthalten
  - $\mu_A(x) \in]0,1[$, wenn die charakteristische Eigenschaft von A nur teilweise auf x zutrifft.

Zugehörigkeit vs. Wahrscheinlichkeit

- Grad der Zugehörigkeit ist nicht mit Wahrscheinlichkeit der Zugehörigkeit zu verwechseln.
  - Summe / Integral aller Zugehörigkeiten muss nicht gleich 1 sein.
  - → Kapitel 4

Beispiel



Anwendung

- z.B. Modellierung von (unscharfen, subjektiven) Konzepten oder Begriffen.
  - Durch Experimente sind die (teilweise unbewussten) Urteile der Testpersonen leicht zu ermitteln.
    - z.B. Messen der Reaktionszeit beim Urteilen
  - Annäherung durch Fuzzy Mengen / Intervalle
  - → Kapitel 6

Rekursiver Aufbau 1

- Ineinanderbauende Ebenen
  - Mengen von Fuzzy Mengen (s.a. klassische Mengenlehre), etc.
  - Fuzzy-Potenzmenge $\underline{P}$: Menge aller Fuzzy Teilmengen über X.
    - $\underline{P}^{k}(X) \rightarrow \underline{P}(\underline{P}^{k-1}(X))$
  - $\mu_A : \underline{P}(X)^{k-1} \rightarrow [0,1]$

Rekursiver Aufbau 2

- Aufeinanderbauende Ebenen
  - z.B. „intelligent“, Grade der Zugehörigkeit „durchschnittlich“, „herausragend“, etc. (Ebene-1 Fuzzy Mengen)
  - Um Zugehörigkeit ebenfalls „fuzzy“ realisieren zu können (nicht in exakten Zahlen).

Fuzzy, fuzzier, ...

- Fuzzy Mengen zur Beschreibung anderer Fuzzy Mengen erlauben unschärfere Beschreibung.
- Andere Möglichkeit:
  - Abbildung auf Teil-Intervalle/Mengen
  - $\mu_A : X \rightarrow P([0,1])$

Fuzzy Mengen vs. Fuzzy Messungen

- Fuzzy Messungen:
  - g: P(X) → [0,1]
  - Unsicherheit bezüglich der Zugehörigkeit eines Elements x aus X zu den Teilmenge von X.
  - Die fraglichen Teilmengen sind jedoch „scharf“, d.h. nicht fuzzy.
  - → Kapitel 4

Abbildungsverzeichnis

- Alle Abbildungen sind veränderte vom Referent, jedoch ursprünglich aus

  G. J. Klir / T.A. Folger (1992):

  Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information

  entnommen.